

286 1098757

硕士研究生学位论文

新疆大学

论文题目(中文): 近地面沙尘运动模型数值解法的研究

论文题目(外文): The studying on numerical method for
the model about the movement of dust
and the sand

研究生姓名: 赵建平

学 科、专 业: 计算数学

学 位 类 别: 理学硕士

研 究 方 向: 偏微分方程数值解

导师 姓名 职称: 阿布都热西提·阿不都外力教授

论文答辩日期 2007 年 6 月 2 日

学位授予日期 2007 年 月 日

学位论文独创性声明

本人声明，所呈交的学位论文系本人在导师指导下独立完成的研究成果。文中依法引用他人的成果，均已做出明确标注或得到许可。论文内容未包含法律意义上已属于他人的任何形式的研究成果，也不包含本人已用于其他学位申请的论文或成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本人如违反上述声明，愿意承担由此引发的一切责任和后果。

论文作者签名：赵建平 日期：07年5月28日

学位论文知识产权权属声明

本人的学位论文是在学期间在导师指导下完成的，知识产权归属学校。学校享有以任何方式发表、复制、公开阅览、借阅以及申请专利等权利。本人离校后发表或使用学位论文或与该论文直接相关的学术论文或成果时，署名单位仍然为新疆大学。

本学位论文属于：

保密 ，在 年解密后适用于本声明。

不保密 。

（请在以上方框内打“√”）

论文作者签名：赵建平 日期：07年5月28日

导师签名：阿布都哈米提 日期：2007年5月28日

近地面沙尘运动模型数值解法的研究

摘 要

在稀气相两相流的双流体模型的框架下, 本文研究了可侵蚀地表上方充分发展的湍流大气边界层流动对土壤颗粒的气动卷扬作用, 建立了近地面沙尘运动的数学模型, 讨论了模型的解存在性和唯一性, 并且使用简单实用的数值方法进行数值模拟, 通过数值实验表明, 它较真实的反映了沙尘运动的实际情况, 这将为土壤风蚀和沙尘暴模拟及预报提供有利的工具, 为定量预报沙尘暴系统结构和远距离输送传播提供了理论基础。

第一章讲述了沙漠和沙漠化方面的研究由来及现状发展, 第二章讲述流体力学背景及其必备知识, 和气固两相流的模型方程和意义, 同时也引出了近地面的沙尘运动的数学模型; 第三章主要引入了两种数值计算方法来计算沙尘跃移模型, 同时比较了两种方法的数值结果, 结果表明加权格式优于龙格-库塔格式, 也做了不同粒径不同风速条件下, 跃移运动轨迹的模拟; 最后一章讲述了由此研究引入的新的问题以及毕业论文中存在的不足。

关键词: 含尘大气; 气固两相流; 边界层; 跃移; 数值方法.

The studying on numerical method for the model about the movement of dust and the sand

Abstract

In the framework of the two fluid model of dilute dusty gases, the paper mainly discusses the aerodynamic entrainment of the dust and sand particles in the fully developed turbulent atmospheric boundary layer over an erodible surface are studied and the aerodynamic drag as well as the Saffman lifting and Gravity forces are considered. We also put forward the model about dispersed phase dust movement and use the simple numeric method in order to demonstrate the movement of dust and the sand. Results show that it is similar to the fact. It will be facility and new idea for wind erosion and sand-dust storm.

In the first chapter we discuss the reason and the development of desert and desertization, make a summary of sand moving background. In the second chapter, we discuss the basic method and information about our research, and the meaning of the model function about two fluid - dusty and gas. Meanwhile we also put forward the sand moving modeling near the boundary layer. In the chapter three, firstly we use R-K method about ODE initial value question for the moving model, secondly we use the weighted schemes to calculate and discuss its advantages. We also do the experiments to demonstrate the movement under the different wind and different dust diameter. At last, we must take more consideration about it, so we will face Semi-infinite Laminar on a flat plate. To solve the next boundary layer equation about second Order incompressible flow.

Key Words: dusty atmosphere; boundary layer; numerical modeling.

1 引言

1.1 问题的提出

沙漠和沙漠化问题，是当今世界重大环境问题之一。我国是全球沙尘暴四个高发区之一。我国沙漠、戈壁及沙漠化土地总面积为 168.9 万平方公里，占国土面积的 17.6%，主要分布在新疆、甘肃、青海、宁夏和内蒙古等地。沙尘暴频起与荒漠化扩展的步伐是一致的。50 至 60 年代，沙化土地每年扩展 1560 平方公里；70 至 80 年代，沙化土地每年扩展 2100 平方公里；90 年代，沙化土地每年扩展 2460 平方公里。并且 20 世纪下半叶我国沙尘暴活动呈急速上升趋势。因此沙尘暴已经成为影响我国西部发展的一种环境灾害，相关的研究引起了政府部门和科学工作者的重视。沙尘暴是土地荒漠化发展到一定阶段的产物，也是加速土地荒漠化的重要过程。作为大气与地表相互作用的形成的风沙地貌，它包括两个方面，土壤风蚀和沙尘暴是特定地形下垫面和天气系统共同作用的结果。大气边界层将沙尘从地表卷扬到空气中形成土壤风蚀；大量的沙尘参与大气运动导致了沙尘暴的发生。

在国内风沙地貌学这些年已有的飞速的发展，从吴正认为沙的运动这一主题属于物理学比属于地理科学远为恰当，他从单一的颗粒受力运动特性入手来研究单颗沙粒在风中的运动[1]，计算了沙土颗粒在风力吹扬下所能达到的距离和高度。凌裕泉、吴正（1980）在风洞通过高速电影等方法，观察到沙粒跃移特征是：由于颗粒碰撞方位不同，可以各种角度向上跳起，其中起跳（ α ）为 $30^\circ - 50^\circ$ 者居多，占 39.5%，其次为 $60^\circ - 80^\circ$ 占 27.7%；降落角总保持在占 $10^\circ - 30^\circ$ 之间，小于 10° 者出现概率不大，仅占沙的 7% 左右。刘贤万（1993, 1995）[11]根据典型颗粒跃移运动受力分析提出模拟轨迹方程，利用其方程得到其他运动参数：

$$\begin{cases} x = \frac{uy_0}{g'} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g'y}{y_0^2}} \right] - \frac{1}{k} \ln \left[1 + \frac{ky_0}{g'} (u - \ddot{x}_0) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2g'y}{y_0^2}} \right) \right] \\ v_x = u - \frac{u-x_0}{1+k(u-x_0)t}, \\ v_y = y_0 - g't, \end{cases}$$

这个轨迹参数方程是一个变形的抛物线方程。 y 随着 y_0 增大而增大, 随着 g' 增大而减小, 则表明轻质颗粒易于跃高[10]。相关方面都取得的不少进展, 主要是室内实验与现场观测以及一些定量和半定量的分析, 近年来开始了数值模拟研究[32], 但对于沙尘运动仍基于单颗粒轨道模型。此外, 针对沙尘暴现象, 大气科学学者亦通过数值模拟手段研究了沙尘的热力影响、辐射效应、传输扩散过程和动力机制等[11], 这些工作多是采用将沙尘的辐射或扩散因子嵌入现有的气象学模式的方式, 针对个别算例进行分析计算的, 在与实测结果方面取得了一定的进展, 但是都是流体模型, 只是处理沙尘相对空气的扩散。柏实义(1985)采用连续介质理论的双流体模型, 所建立的宏观气固两相流体模拟方程组。气固二相流体可分为两类: 一是气固两相均匀或不均匀混合的气固两相流体, 二是在气固两相交界面上, 由于相互作用而形成的非均匀混合的气固两相流体。就是说, 第一种是在空中运动, 不着边界的, 没有边界的影响; 第二种则是在边界上, 由于风吹动沙而产生的二相流体。它们并不仅仅是属于两相介面, 由于相互作用而产生的二相流体和其运动属于沉积运动, 但是在高层上, 它们可以是由于湍流剪切、湍流扩散和湍流交换产生的气固或液固两相均匀或不均匀的混合二相流体。陈强(2004)等[3]研究了大气悬浮沙尘在阵风作用下的运动轨迹, 揭示了在 Stokes 阻力作用下沙尘悬移可能转化为跃移的现象。王柏懿(2004,2006)等[2][4] 提出从稀相两相流理论出发, 针对沙粒微团推出的弥散相运动方程及连续性方程。本文从数学角度分析模型, 建立边界层沙尘运动的数学模型, 本文提出用简单的数值方法对模型进行数值计算, 给出具体算例讨论了数值结果的有效性意义。揭示了不同粒径在两种不同风速下的运动实质, 并且计算了沙尘剖面密度。

2 风沙两相流与近地边界层颗粒运动模型介绍

2.1 预备知识

关于本文研究内容在流体力学中首先要了解以下几方面内容：

- 1、流体的性质与运动描述的方法；
- 2、流体运动的基本方程；
- 3、两相流动的参数及其受力说明。

以下将一一介绍。流体力学主要研究流体的宏观运动，而研究途径有宏观和微观两种，常用的宏观途径是先给流体建立一个宏观“抽象化”的物质模型，然后直接应用基本物理定律来建立宏观物理量应满足的方程，并确定流体的宏观性质，其基础就是流体质点于连续介质假设：认为流体是一种有无限多连续分布的流体质点所组成的物质。大量实际应用和实验都证明，在一般情况下，基于连续介质假设而建立的流体力学理论是正确的。通常把流体所占据的空间叫做流场，在流场中，任何瞬时和每一空间上的点都有而且仅有一个流体质点存在，流体质点没有空间尺度但具有确定的宏观物理量，如密度，速度，压力和温度等。在流场中他们都应是时间和空间的连续函数，从而应用连续函数解析方法来描述流体的宏观物理性质以及流体的平衡和运动。

描述流体运动就着眼点不同方法有两种，一是拉格朗日(Lagrange)描述方法和欧拉法描述法。拉格朗日方法着眼于流体质点的描述方法，通过描述各流体质点的运动规律即位置随时间变化的规律，来确定整个流场的运动规律。通常利用初始时刻 $t = t_0$ 时，流体质点所处的空间坐标为 (a, b, c) 作为区分不同质点的标号参数。在人为选定的某种空间坐标系中，一个流体质点只有一组固定不变的 (a, b, c) 值，即不同的 (a, b, c) 值代表不同的流体质点。有了流体质点的坐标参数后，其运动规律若用矢量形式给出，则为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$ ， \mathbf{r} 是流体质点的位置径矢； (a, b, c) 称为拉格朗日变数或随体坐标。若选定的是空间直角坐标系，写成标量形式则有

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t), \\ y = y(a, b, c, t), \\ z = z(a, b, c, t), \end{cases} \quad (1.1)$$

(a, b, c) 就是指 $t = t_0$ 时 $(x, y, z) = (a, b, c)$ 。

欧拉描述法则是着眼于流场空间点的描述方法,通过在流场中各个固定空间上对流动的观察,来确定流体经过质点所占据空间点上的物理量随时间变化,但所观察到的物理量总是与该空间点位置相联系的.这样就可以获得整个流体物理量空间分布及变化规律.显然,流体质点的物理量 B 都将表示为空间坐标和时间的函数: $B = B(\mathbf{r}, t) = B(q_1, q_2, q_3, t)$, 式中 (q_1, q_2, q_3) 称为欧拉变数或者空间坐标, \mathbf{r} 是空间坐标点的矢径。在直角坐标系中,

$$\mathbf{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, (q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$$

于是 $B = B(x, y, z, t)$ 以及上面式子都表示了 t 时刻流场各物理量的分布函数,它们所构成的是一个物理量的场,例如,速度场,加速度场,压力场和密度场等。对于本文讨论的含尘大气的运动跟踪如此大量的颗粒无论是实验还是计算都是十分困难的,一般以连续介质方法为宜,即采取欧拉方法描述。

流体动力学中几个常见的方程有以下几种,首先连续性方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (1.2)$$

运动方程:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \vec{P} \quad (1.3)$$

能量方程:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \rho q + \nabla \cdot (k \nabla T) - p(\nabla \cdot \vec{V}) + \Phi \quad (1.4)$$

状态方程:

$$p = \rho RT, \quad (1.5)$$

式中应力张量:

$$\vec{P} = -p\vec{I} + 2\mu(\vec{E} - \frac{1}{3}\nabla \cdot \vec{V}\vec{I}) \quad (1.6)$$

随体导数:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \quad (1.7)$$

粘性耗散函数:

$$\Phi = 2\mu(\vec{E}^2 - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{V}\vec{I})) \quad (1.8)$$

他们的适用范围(即建立的前提)是: 单相连续介质和热动力平衡态假设成立; 牛顿粘性流体模型和完全气体模型; 在惯性参考系内的运动。在不同情况下, 根据条件变化, 简化上述基本方程组。比如说, 流体是不可压缩流体 $\rho = c$, 则连续性方程经简化可变成 $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ 。他们基本上能适应在各种工程技术中流体力学问题的研究和应用。

两相流动的参数及其受力分析。气固两相间的作用力括气动升力和阻力, Saffman 力, Magnus 力, 科氏力, 压力梯度力, Basset 历程力和表现质量力等等。下面主要讲述后面章节即将用到的几种力。气固两相流间间的气动阻力(亦称拖曳力)是最重要的作用力。Saffman 力是剪切流场作用于固体颗粒的横向力, 当垂直风切变和颗粒直径较大的时候应当考虑。Magnus 力则是作用在旋转颗粒上的横向力, 对于做高速旋转颗粒而言亦应计及。科氏力是指与行星旋转同向, 则科氏力自转轴成辐射状向外, 如果纬向运动与行星旋转方向相反, 则科氏力由外向内尘辐射状指向旋转轴。最后, 一般情况下, 与空气动力相比, 后面三种力可以忽略不计。

流体力学中我们常用无量纲化的方法, 将有量纲的方程转化为无量纲方程, 便于计算和求解。因此常会引出一些参数, 如雷诺(Reynolds)数 Re , 它表征惯性力与粘性力之比, $Re = \frac{V_0 \rho L_0}{\mu}$; 弗劳德(Froude)数 Fr , 表征惯性力与重力之比 $Fr = \sqrt{\frac{V_0^2}{gL_0}}$, 欧拉数 $Eu = \frac{F_0}{\rho V_0^2}$, 罗斯比(Rossby)数 Ro , 它表征惯性力和科氏力之比, $Ro = \frac{v}{fL_0}$, 当 $Ro \ll 1$ 时说明科氏力起作用。颗粒剪切横移参数 $\kappa = (\pi/9.69)(\rho_s^0/\rho^*)(V_0^*/\omega^* L^*)$,

它表征沙尘惯性力与Saffman力之比，当 $\kappa \gg 1$ 时，Saffman 力可以忽略不计。还有很多参数，马赫数 (Mach)，韦伯数等因为本文中不用，这里也就不一一累述。

2.2 风沙两相流模型与假设

假设[4]气象条件下含尘大气是一种稀气固两相流体，即使在沙尘暴天气下沙尘体积分数远小于 1，可以认为固相是一种零应力流体，而且气相对固相的作用力和传热等于气体对单球作用的线性叠加。因此只需考虑两相间的动量和能量交换。气固相间作用力包括气动升力和阻力，Saffman 力，Magnus 力，压力梯度力，Basset 历程力，和表现质量力等，对含尘大气运动边界层问题，只考虑气流的均匀运动产生的气动阻力和 Saffman 力及沙粒重力。这里都是将风沙流看成气体和沙土颗粒组成的气固两相拟流体，在平均均一的地表上做二维、不可压缩、各参数水平变化很小，而垂直变化剧烈的定常运动。假设颗粒是具有相同质量 m^* 和相同粒径 d^* 的刚性球体以及颗粒的布朗运动和相互碰撞忽略不计，空气满足完全气体状态方程，认为不可压缩流体。

基于上述假设，在随地球一起旋转的局地直角坐标系中，描述含尘大气运动的基本方程为（这里下标 s 表示沙尘固相参数，上标 $*$ 表示有量纲物理量）

(1)气相:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* V^*) = 0, \\ \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + (V^* \cdot \nabla) V^* = -\frac{1}{\rho^*} \nabla p^* + g^* - 2\Omega^* \times V^* + f_r^* - \frac{\rho_s^*}{\rho^* m^*} f_s^*, \\ \frac{\partial E_s^*}{\partial t^*} + (V^* \cdot \nabla) E^* = -\frac{1}{\rho^*} \nabla \cdot (p^* V^*) + Q^* + \frac{1}{m^*} (V^* \cdot f^* + q^*), \\ p^* = \rho^* R^* T^*. \end{cases} \quad (2.1)$$

(2)固相:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_s^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho_s^* V_s^*) = 0, \\ \frac{\partial V_s^*}{\partial t^*} + (V_s^* \cdot \nabla) V_s^* = g^* - 2\Omega^* \times V_s^* + \frac{f_s^*}{m^*}, \\ \frac{\partial E_s^*}{\partial t^*} + (V_s^* \cdot \nabla) E_s^* = Q_s^* + \frac{1}{m^*} (V_s^* \cdot f_s^* + q_s^*). \end{cases} \quad (2.2)$$

2个方程组中, p^* , ρ^* 和 V^* 为压力、密度和速度矢量;

$$E^* = \frac{V^{*2}}{2} + g^* z^* + C_v^* T^*, \quad (2.3)$$

为总比内能(其中 z^* 为高度, C_v^* 为定容比热); g^* 和 Ω^* 是重力加速度和地球自转角速度矢量; f_s^* 为空气黏性所导致的内摩擦力, f_s^* 和 q_s^* 为单球沙粒承受的空气作用力和热流分析。方程(2.1)依次是气体的连续性方程, 运动方程, 能量方程和状态方程。这组基本方程可以描述含尘大气中各种尺度的运动, 在不同情况下可以简化。当将空气按照不可压缩流体处理时, 平均风速方向为 x^* 轴, 垂直方向为 y 轴考虑沙尘颗粒承受的作用力为:

$$\begin{aligned} f_s^* &= 3\pi d^* \mu^* (V^* - V_s^*) D + 1.615 d^{*2} (\rho^* \mu^* |\frac{\partial V_x^*}{\partial y^*}|)^{1/2} (V_x^* - V_{xs}^*) H \kappa \\ &- \frac{1}{8} \pi d^{*3} \rho^* \omega^* \times (V^* - V_s^*) \end{aligned} \quad (2.4)$$

这里修正因子 D, H 分别表示颗粒滑移雷诺数 Re_s 有限值效应, 表达式如下

$$D = 1 + \frac{1}{6} Re_s^{\frac{2}{3}}$$

$$H = \begin{cases} 0.46867(1 - e^{-0.1 Re_s}) (\frac{Re_g}{Re_s})^{\frac{1}{2}} + e^{-0.1 Re_s} & \text{当 } Re_s \leq 40 \\ 0.0741 Re_s^{\frac{1}{2}} & \text{当 } Re_s > 40 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$Re_s = \|U - V_s\| Re_0, Re_g = \frac{d^*}{4L^*} \left\| \frac{\partial V_h}{\partial y} \right\| Re_0 Re_0 = \frac{\rho^* V_0 d^*}{\mu^*} \quad (2.6)$$

Re_0 是颗粒雷诺数。引入无量纲参量:

$$(x, y, z) = (x^*, y^*, z^*) / L^*$$

$$t = V_0^* t^* / L^*$$

其中 L^* 和 V_0^* 为所研究问题的特征长度和特征速度。这样无量纲化后的弥散项的动量方程取下述形式：

$$\frac{\partial V_s}{\partial t} + (V_s \cdot \nabla) V_s = -\frac{1}{Fr} \kappa - \frac{1}{R_0} \Omega \times V_s + \frac{1}{\beta} (V - V_s) D + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^{1/2} (V_x - V_{xs}) H \kappa - \frac{1}{\chi} \omega \times (V - V_s) \quad (2.7)$$

这里的参数 Fr , β , R_0 , χ , κ 在前面已有介绍。方程 (2.2) 描述的分别是弥散相的连续性方程，运动方程，能量方程。在二维条件下，颗粒密度不变的情况下，只考虑连续性方程和运动方程。上述方程组就是含尘大气气固两相流的整体模型在不同的问题中进行不同的简化。

2.3 近地边界层颗粒运动模型的研究

风沙运动主要发生在近地面的大气表面边界层内，作为一个模型模型问题，先考虑广阔平坦裸露沙地，大气的风将沙尘由地表卷扬进入空中，形成含尘大气表面边界层。主要考虑气动卷扬特性，即颗粒在驱动过程中从大气中获取的能量等。由于沙尘密度远大于空气，其惯性作用难以对高频的气流脉动产生效应，因此在考虑气固相作用力时只计入气流产生的气动阻力和 Saffman 力。当固相质量载荷率很小时，可采用单向耦合模型，即气相流动可由动力气象学理论直接得到：在充分发展的大气表面边界层中，平均风速随高度的变化近似于对数分布，风向亦不随高度变化。这样可以得到风速公式：

$$u = \frac{u_f^*}{K} \ln \frac{y^* + y_0^*}{y_0^*} \quad (2.8)$$

这里 u^* 是平均风速， $u_f^* = \sqrt{\tau_0^* / \rho^*}$ 为阻尼风速。同样引入无量纲化参量：

$$\begin{cases} x = x^*/l^* & y = y^*/l^* & u = u^*/u_f^*, \\ u_s^* = u_s^*/u_f^* & v_s^* = v_s^*/u_f^*, \\ t = t^*u_f^*/l^* & n_s = n_s^*/n_0^*. \end{cases}$$

有量纲转化的过程省去，直接先给出无量纲化后的风速廓线公式

$$u = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{l^*}{y^*}y + 1\right) \quad (2.9)$$

其中 K 为卡曼常数（通常情况取 $K = 0.4$ ）， y_0^* 为粗糙度参数， l^* 是研究问题的特征长度。另外气相是均匀的则有 $(V \cdot \nabla)V = 0$ ，如果来流气体速度是恒定的，则 $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ 。对于(2.7)当来流为非恒定且均匀流动时， $\frac{\partial V_s^*}{\partial t^*} + (V_s^* \cdot \nabla)V_s^* = \frac{dV_s^*}{dt}$ 在 Lagrange 坐标下设每个颗粒微团在流场中的位置和速度分别为 (x_s^*, y_s^*) 和 (u_s^*, v_s^*) 来表示，它的初始位置为 $(x_0^*, 0)$ ，从地开始沿其轨道运动的时间为 t 。这样无量纲的固相分量运动方程为

$$\begin{cases} \frac{dx_s}{dt} = u_s, \\ \frac{dy_s}{dt} = v_s, \\ \frac{du_s}{dt} = (u - u_s)D, \\ \frac{dv_s}{dt} = -v_s D + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\frac{1}{2}} (u - u_s)H - \frac{1}{Fr}, \\ n_s |v_s| = 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\text{相应的初始条件为: } t = 0: x_s = x_0, y_s = 0, u_s = 0, v_s = v_{s0} \quad (2.11)$$

下面考察模型的解的存在唯一性。首先引入常微分方程初值问题的一个引理 [23]

引理2.1

对于方程组

$$\begin{cases} Y' = f(t, Y), \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

我们知道如果函数 $f(x, Y)$ 适当光滑—譬如关于满足利谱希茨条件

$$\|f(x, Y) - f(x, \bar{Y})\| \leq L\|Y - \bar{Y}\| \quad (2.13)$$

理论上就可以保证初值问题(2.10)的解 $y = y(x)$ 存在并且唯一。

对于(2.10)式第三、四两式，提出定理

定理2.1

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D & 0 \\ -\frac{1}{k}(\frac{\partial u}{\partial y})^{0.5}H & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Fr} \end{pmatrix}$$

方程组

$$\begin{cases} Y' = F \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

解亦即本模型的解是存在而且唯一的。

证明：

$$\begin{aligned} \|F_1 - F_2\| &= \left\| \begin{pmatrix} -Y_1D_1 + Y_{11}D_2 \\ -Y_2D_1 - \frac{1}{k}(\frac{\partial u}{\partial y})^{0.5}(H_1Y_1 - H_2Y_{11}) + Y_{12}D_2 \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq |D_{max}| \cdot \|Y - Y_1\| + \left| \frac{1}{k}H_{max}(\frac{\partial u}{\partial y})^{0.5} \right| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 - Y_{12} \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq (|D_{max}| + \left| \frac{1}{k}H_{max}(\frac{\partial u}{\partial y})^{0.5} \right|) \|Y - Y_1\| \end{aligned}$$

由于 D, H ，为有界因子，所以令

$$L = |D_{max}| + \left| \frac{1}{k}H_{max}(\frac{\partial u}{\partial y})^{0.5} \right|$$

这样

$$\|F_1 - F_2\| \leq L\|Y - Y_1\|$$

再利用引理 (2.1)，得知本模型的存在而且唯一的。证毕。

3 模型的数值计算

3.1 用龙格-库塔方法的计算

将复杂的运动模型转化为一阶非线性常微分方程组的初值问题。

对(2.10), 改写为

$$\begin{cases} \frac{dX_s}{dt} = U_s, \\ \frac{dU_s}{dt} = F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $X_s = (x_s, y_s)'$, $U_s = (u_s, v_s)'$, $F_1 = (u - u_s)D$,

$$F_2 = -v_s D + \frac{1}{K} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{\frac{1}{2}} (u - u_s) H - \frac{1}{Fr}.$$

本文先采用常用于常微分方程初值问题的数值解法龙格-库塔方法来求解。

$$\begin{cases} K_1 = F(U_{s,n}), \\ K_2 = F(U_{s,n} + \frac{\tau}{2}K_1), \\ K_3 = F(U_{s,n} + \frac{\tau}{2}K_2), \\ K_4 = F(U_{s,n} + \tau K_3), \\ U_{s,n+1} = U_{s,n} + \frac{\tau}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ X_{s,n+1} = X_{s,n} + \tau U_{s,n+1}, \\ x_{s,1} = x_0, \quad y_{s,1} = 0 \quad u_{s,1} = 0, \quad v_{s,1} = v_{s0}, \\ 1 \leq n \leq \frac{Tmax}{\tau}. \end{cases} \quad (3.2)$$

相容性, 稳定性及收敛性分析对于常微分方程组的差分格式, $Y_{n+1} = Y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$ 如 $\varphi(x, y, h) = f(x, y)$ 则R-K方法相容, 显然对于本文的模型方程组, 满足。R-K四阶显示方法的精度为 $O(\tau^5)$ 。

对于收敛性, 我们引入引理

引理3.1 $X_n = X_0 + n\tau$, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $Y_n \rightarrow y(x_n)$, 则该方法收敛的。

3.2 用加权格式的计算及其算法理论分析

本文加权格式来计算模型的数值结果。首先介绍加权格式的构造及其各种性质。我们知道对于常微分方程初值问题常见的差分方法有，欧拉方法。

$$\begin{cases} y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n), & (3.3) \\ y_n - y_{n-1} = hf(x_n, y_n), & (3.4) \end{cases}$$

给(3.1) $\times \theta$ + (3.2) $\times (1 - \theta)$, 得

$$\theta \times (y_{n+1} - y_n) + (1 - \theta)(y_n - y_{n-1}) = \theta \times (hf(x_n, y_n)) + (1 - \theta) \times hf(x_n, y_n),$$

整理化简, 得

$$\theta y_{n+1} + (1 - 2\theta)y_n - (1 - \theta)y_{n-1} = hf(x_n, y_n) \quad (3.5)$$

当 $\theta = 0.53$ 时, 利用到本模型常微分方程组的差分格式为:

$$\begin{cases} x_{s,n+1} = \frac{1-\theta}{\theta} x_{s,n-1} + \frac{1-2\theta}{\theta} x_{s,n} + \frac{\tau}{\theta} u_{s,n}, \\ y_{s,n+1} = \frac{1-\theta}{\theta} y_{s,n-1} + \frac{1-2\theta}{\theta} y_{s,n} + \frac{\tau}{\theta} v_{s,n}, \\ u_{s,n+1} = \frac{1-\theta}{\theta} u_{s,n-1} + \frac{1-2\theta}{\theta} u_{s,n} + \frac{\tau}{\theta} (u - u_{s,n}) * D_n, \\ v_{s,n+1} = \frac{1-\theta}{\theta} v_{s,n-1} + \frac{1-2\theta}{\theta} v_{s,n} + \frac{\tau}{\theta} (-v_{s,n} * D_n + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial y}^{\frac{1}{2}} (u - u_{s,n}) H_n - \frac{1}{F\tau}), \\ x_{s,1} = x_0, \quad y_{s,1} = 0 \quad u_{s,1} = 0, \quad v_{s,1} = v_{s0}, \\ 1 \leq n \leq \frac{Tmax}{\tau}. \end{cases} \quad (3.6)$$

其中参数 θ 的范围为 $[0,1]$, 特殊的当 $\theta = 0$ 时为隐格式, 当 $\theta = 1$ 为显格式, 当 $\theta = 1/2$ 时是Henu中点法 $y_{n+1} - y_n = 2hf(x_n, y_n)$ 。

加权格式的误差估计, 相容性, 稳定性, 收敛性的分析。用 Taylor 展开式来估计加权格式的误差阶数(考察当 $\theta \neq 0$ 时)

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{1}{2!} h^2 y''(x_n) + o(h^3),$$

$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - \frac{1}{2!}h^2y''(x_n) + o(h^3),$$

将上述两式代入(3.3)估计截断误差计算公式

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - \left[\sum_{k=1}^r \alpha_k y(x_{n-k}) + h \sum_{k=1}^r \beta_k f(x_{n-k}, y_{n-k}) \right]$$

带入整理得:

$$T_{n+1} = \frac{1}{2!}(1 - \frac{1-\theta}{\theta})h^2y''(x_n) + \frac{1}{3!}(1 + \frac{1-\theta}{\theta})h^3y'''(x_n) + O(h^4), \quad (3.7)$$

按照 θ 的取值分类讨论截断误差:

I. 当 $\theta = 0.5$ 时,

$$T_{n+1} = \frac{2}{3!}h^3y'''(x_n) + o(h^4),$$

II. 当 $\theta \neq 0.5$ 时,

$$T_{n+1} = (1 - \frac{1-\theta}{\theta})h^2y'''(x_n) + o(h^3)$$

即截断误差主项为: $(1 - \frac{1-\theta}{\theta})h^2y'''(x_n)$ 。

它是一阶方法, 但是误差主项的系数可以通过 θ 的值而改变, 系数最大为 0.5, 最小为 0, 比起欧拉法的截断误差要小 $\frac{1-\theta}{\theta}$ 倍。下面是关于加权格式的相容性和稳定性的定理。

定理3.1 加权格式(3.3)的解相容于常微分方程初值问题的解。这个利用引理3.1很容易得证。

引理3.2 线性多步法稳定的充要条件是它的第一特征多项式满足重根条件, 即 $\varphi(\lambda)$ 的所有根在单位圆内 ($|\lambda| \leq 1$), 而位于圆周上的都是单根。

定理3.2 加权格式 (3.3) 稳定的充要条件是 $0.5 \leq \theta \leq 1$ 。

证明: 加权格式 (3.3) 的第一特征多项式为 $\theta\lambda^2 + (1-2\theta)\lambda + (\theta-1) = 0$, 通过计算特征根为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - \frac{1}{\theta}$, 有引理 3.2 可知, 只需满足 $|1 - \frac{1}{\theta}| \leq 1$ 也就是 $\theta \geq 0.5$, 另外加权因子 $0 \leq \theta \leq 1$, 因此综合, 得 $0.5 \leq \theta \leq 1$ 是加权格式稳定的充要条件, 定理 3.2 得证。

3.3 实例分析与结果比较

对于两种数值方法我们采用相同的颗粒半径,风速条件下,来比较他们的数据结果,并将运动轨迹图像展示如下。其中各参数取 $d = 100\mu\text{m}$ 沙尘密度比 $\rho_s/\rho_0 = 2500$, 特征速度取 $V_0 = 10\text{m/s}$, 重力加速度 $g = 9.8\text{m/s}^2$, 卡曼常数 $K = 0.4$ 。粗糙度 $\mu^* = 0.404$, 利用Matlab编程计算其数值结果.得到如下结果(参看表1)。

表.1 不同粒径沙尘风速为10m/s,30m/s运动轨迹参数

| 粒径(μm) | U_∞^* (m/s) | 水平位移(m) | 最大高度(m) | t_{max} (s) |
|---------------------|--------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| 1 | 10 | 2.4×10^2 | 0.1047 | 25 |
| 10 | 10 | 0.575×10^2 | 7.44×10^{-2} | 6.637 |
| 100 | 10 | 0.2882 | 1.26×10^{-2} | 6.56×10^{-2} |
| 500 | 10 | 1.13×10^{-2} | 5.065×10^{-5} | 2.62×10^{-3} |
| 1 | 30 | 2.43×10^2 | 0.12537 | 9 |
| 10 | 30 | 0.62×10^2 | 3.61×10^{-2} | 2.6 |
| 100 | 30 | 0.3036 | 2.8×10^{-4} | 1.75×10^{-2} |
| 500 | 30 | 1.2005×10^{-2} | 1.1127×10^{-5} | 6.973×10^{-4} |

3.4 数值结果分析与讨论

用加权方法计算运动模型方程,取不同颗粒半径,不同风速条件下,颗粒运动状态。如图1-4分别为 $d = 1\mu\text{m}$, $d = 10\mu\text{m}$, $d = 100\mu\text{m}$, $d = 500\mu\text{m}$ 颗粒在风速 $u_\infty = 10\text{m/s}$, 30m/s 的运动轨迹图像。由图中可以得知:
 (1) 在强风条件下当沙尘尺寸为 $1\mu\text{m}$ 量级时由于 Saffman 力作用卷扬到大气后沉降过程十分缓慢,沙尘运动以悬移为主;
 (2) 对于相同的风力。随着颗粒的增加,重力作用的增强,沙尘将以跃移的形式前进;
 (3) 对于相同的粒径,随着风力的减小,气流剪切减弱, Saffman 力效应降低,沙尘跃移的距离明显减小,本文计算表明:在没有计算湍流扩散效应的情况下,

即使有 30m/s 的强风，粒径在 $10\mu\text{m}$ 以上的沙尘都无法维持悬浮状态，沙尘运动都以跃移形式为主。通过表.1 及图.1-图.4 计算结果可以看出，对于 $d = 100\mu\text{m}$ 的颗粒，当风速为 10m/s 时，颗粒跃移高度约为 1.26cm ，需要花 65.6 微秒的时间落地，跃移的长度为 28.82cm ；当风速为 30m/s ，颗粒跃移高度约为 0.28mm ，只需要花 17.5 微秒的时间落地，跃移的长度为 30.36cm ；总体来讲对于风速越大，沙尘的水平运动快于垂直运动。

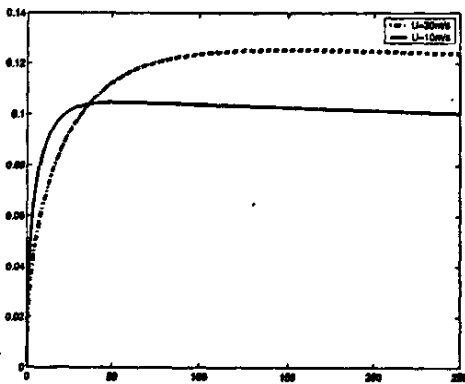


图.1 $d=1\mu\text{m}$ 沙尘运动的轨迹

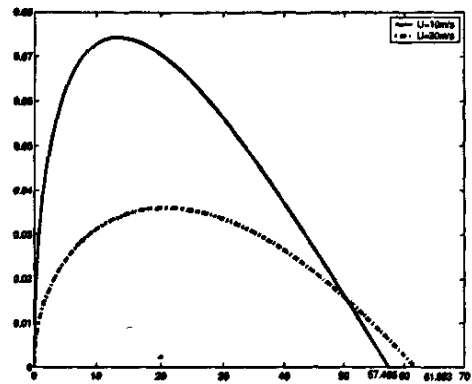


图.2 $d=10\mu\text{m}$ 沙尘运动轨迹

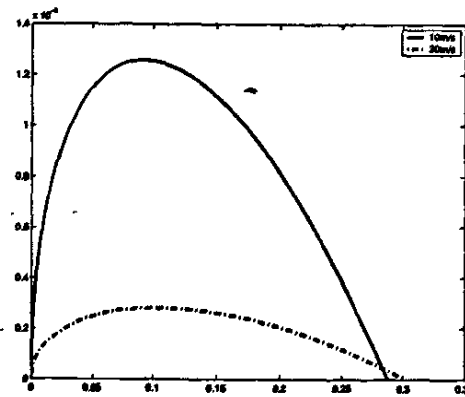


图.3 $d=100\mu\text{m}$ 沙尘运动轨迹

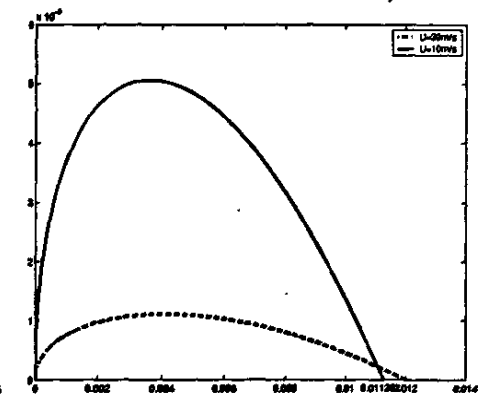


图.4 $d=500\mu\text{m}$ 沙尘运动轨迹

下面图.7-图.10显示大气边界层中沙尘数密度的剖面分布, 其中横坐标为无量纲数密度的倒数。由图中结果知道, (1) 沙尘密度在地表处最小, 随着高度的增加而增加, 在沙尘运动轨迹包络线处区域无限大, 在包络线上方为零; (2) 沙尘密度的分布形式与沙尘的粒径(运动特性)有关, 对于悬移为主的微尘, 分布基本上是均匀的, 仅在毗邻包络线位置急剧增加, 随着粒径的增加, 该分布越来越偏离均匀格式。明显看出沙尘密度随着高度增高而变大, 在地面时最小。并且风速越大, 剖面沙尘数密度越大。

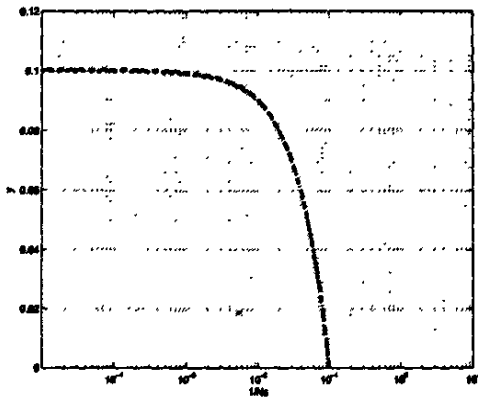


图.7 d=1um, 沙尘切面密度

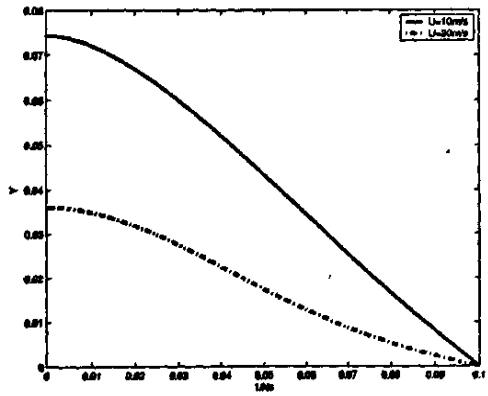


图.8 d=10um 沙尘切面密度

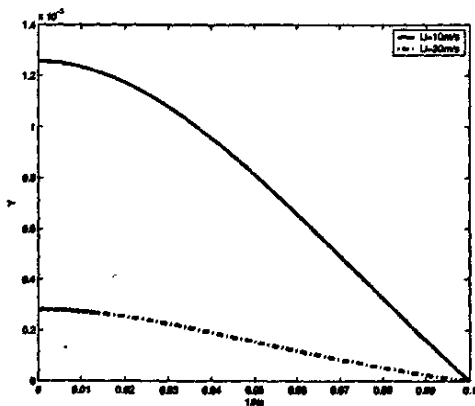


图.9 d=100um 沙尘切面密度

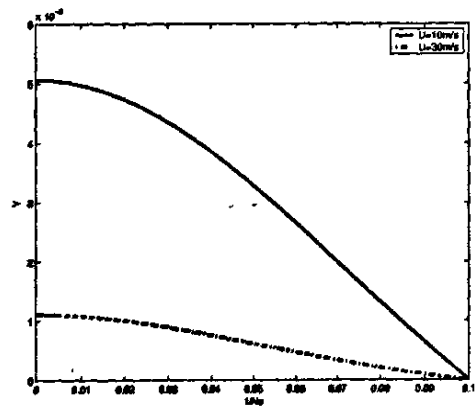


图.10 d=500um 沙尘切面密度

4 总结

本文在稀气固两相流的框架下建立了近地面沙尘运动的数学模型，利用两种方法计算所得沙尘运动轨迹结果，符合实际沙尘运动的规律，这种思路和方法可以推广到一般的流体力学中的一些非线性常微分方程组模型中去，应用的差分格式不是很复杂，重在解决问题。由于计算量不是很大，可以减小步长来提高精度即可。另外在沙尘运动的模型方程中，特别要注意参数的取值，意义，和范围。适用条件通过数值试验可以看出各个参数对沙尘运动的影响，其中粗糙度参数 y_0^* 为例，影响很明显，当粗糙度加大时，明显的影响了沙尘的运动。这一结果从力学机制上阐明了建麦草方格和重灌乔木等防沙治沙工程的有效性，因为它通过改变下垫面的性态，增加了地表粗糙度。在防沙的实例中；宁夏中卫市利用麦草方格治沙已经取得了举世瞩目的成效，在新疆沙漠化较严重的地区同样可以采用这种方法抑制沙漠化的增长。另外，当参数中将沙尘粒径，沙尘密度，风速粗糙度等条件应用具体地区的数据时，就可以模拟当地的沙尘运动情况。这些参数我们通过实地测量可以得到。如此一来，我们可以进而模拟当地沙尘暴和浮尘天气。

在本文的研究中，我们假设大气来流速度是恒定的，并且假设沙尘颗粒有个起跳初速度， $v_{s0} = 0.1m/s$ 。其实这是理想状态下与现实是少有不符的，因此以后第一个要做的问题是，计算半无限长平板边界层层流的问题，就是下面这个二阶不可压层流边界层方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ y = 0 : u = v = 0; \\ y = \infty : u = U(x) \end{cases}$$

解出非均匀来流速度，之后作用沙漠边缘第一批静止颗粒，如果 Saffman 力可以使沙粒卷扬起来并且运动，我们计算它的降落速度，若假设颗粒是弹性碰撞，这样得到的速度做为颗粒的起跳初速度，带到本文的

模型中,则更好一些。这一问题根据资料和文献以及一些专家介绍,还没有人做出来,这也是流体力学工作者非常关心的问题。另外,对于气固两相流的总的偏微分方程组的计算也是很重要的,计算速度场,温度场和气压场也是需要尽快解决的问题。

参考文献

- [1] 吴正, 风沙地貌学与治沙工程, 北京科学出版社, 2003
- [2] 王柏懿, 陈强, 戚隆溪.气固两相流体力学和沙尘暴的研究.力学与实践.2002.24(增刊):77-80
- [3] 陈强, 戚隆溪, 王柏懿.阵风作用下大气悬浮沙尘运动分析.力学与实践.2002.24(增刊):90-94
- [4] 王柏懿, 陈强, 戚隆溪.可侵蚀地表上方含尘大气运动的数值模型.力学学报.2004, 36 (3) : 265-271
- [5] 叶笃正, 李崇银, 王必魁.动力气象学, 北京:科学出版社, 1998
- [6] 柏实义, 二相流动. 北京:国防工业出版社, 1985
- [7] 杨建忠等, 流体力学, 北京:清华大学出版社, 2005.9
- [8] 吴望一, 流体力学(下册), 北京:北京大学出版社, 2004.12
- [9] 王保国, 刘淑艳等, 气体动力学, 北京:北京理工大学出版社, 2005.8
- [10] 李江风, 沙漠气候, 北京, 气象出版社, 2002
- [11] 刘贤万, 实验风沙物理与风沙工程学, 科学出版社, 1995
- [12] 王式功, 董光荣, 陈惠忠等, 沙尘暴研究的进展, 中国沙漠, 2000(4),Vol(20):394-356
- [13] 王涛, 赵哈林, 中国沙漠科学的五十年, 中国沙漠, 2005(2),Vol(25):145-165

- [14] 董治宝, 郑晓静, 中国风沙物理研究50a(II), 中国沙漠, 2005(6), Vol(25):795-815
- [15] 杨具瑞, 方铎等, 非均匀风沙起动规律研究, 中国沙漠, 2004(2), Vol(24):248-251
- [16] 刘儒勋, 舒其望, 计算流体力学的若干新方法, 北京, 科学出版社, 2003.4
- [17] 赵建平, 阿不都热西提, 对常微分方程初值问题的一种新数值解法的提案.新疆大学学报.V(22)2005.11(4):407-411
- [18] 王明新, 非线性抛物型方程, 北京, 科学出版社, 1993.12
- [19] John D.Anderson, JR ,计算流体力学入门, 北京, 清华大学出版社,2002.4第一版
- [20] 傅德薰, 马延文, 计算流体力学, 北京, 高等教育出版社, 2002.7
- [21] 何吉欢, 流体力学广义变分原理, 香港, 中国科学文化出版社, 2003.7
- [22] 现代应用数学手册, 计算与数值分析卷/《现代应用数学手册》编委会编, 北京:清华大学出版社2005.1
- [23] 李庆扬等, 数值分析(第四版), 北京:清华大学出版社, 2002
- [24] 蒋长锦, 科学计算及C程序集, 中国科学技术大学出版社, 1998.9第一版
- [25] 陆金甫, 关治, 偏微分方程数值解法, 北京:清华大学出版社, 2004第二版
- [26] 胡健伟, 汤怀民, 微分方程数值方法, 北京: 科学出版社, 1999
- [27] 赵鸣, 苗曼倩等, 边界层气象学教程, 北京:气象出版社,1989

- [28] 徐佩立, 边界层及其在传递过程中的应用, 北京:高等教育出版社,1988.
- [29] B.Y.WANG and I.I GLASS, Compressible laminar boundary-layer flows of a dusty gas over a semi-infinite flat plate, *J.Fluid Mech.*(1988),vol.188,pp.223-241 printed in Great Britain
- [30] B.Y.wang,Y.Xiong,L.X.Qi.Shock-induced near-wall two-phase flow structure over a micron-sized particles bed.*Shock Waves.*(2006)15:363-373
- [31] J.Douglas and F. A. Milner, Numerical methods for a model of population dynamics, *Calcolo* 24 (1987), pp. 247-254
- [32] T. Koto, Numerical analysis of an age-structured population model with time delay, *J. Comp. Appl. Math.* 152 (2003)
- [33] K. E. Swick, Periodic solutions of a nonlinear age-dependent model of singlespecies population dynamics, *SIAM J. Appl. Math.* 11 (1980), pp. 901-910
- [34] Shao Yaping, *Physics and Modeling of Wind Erosion*, London:Kluwer Academic Publishers,2000

致 谢

本文是在导师阿不都热西提教授的精心指导下完成的，在学校的这些年里，阿老师在学业、生活诸方面给了我无微不至的关怀和帮助，让我很感动。在学习的路上，阿老师严谨求实、认真负责、精益求精的治学态度，以及活跃的思维方式让我受益终生。在此表示衷心的感谢。同时我要感谢张知难教授、盛其荣教授，以及李家永，李小松，熊世春，张磊同学在三年内对我的帮助。

感谢新疆大学数学与系统科学学院各位领导多年来在学习、生活中给予我的支持与帮助。也要感谢朱晓荟老师，张建宏老师在各方面给予我的帮助。

最后我要感谢远在厦门大学的林群教授、中科院力学研究所的王柏懿教授，在毕业论文撰写和改稿中都给了我很大鼓励与帮助。他们的支持与建议，他们对科学研究执着，认真，严谨的治学态度让我有勇气进入交叉学科的研究中，认真地完成这篇论文，对我以后的工作也有很重要的影响。