

硕士学位论文

颗粒体系电阻值对压应力的响应特性研究

**RESEARCH ON RESISTANCE OF GRANULAR
SYSTEM RESPONSE WITH COMPRESIVE
STRESS**

任杰骥

哈尔滨工业大学

2015 年 6 月

国内图书分类号：O44
国际图书分类号：537

学校代码：10213
密级：公开

理学硕士学位论文

颗粒体系电阻值对压应力的响应特性研究

硕 士 研 究 生：任杰骥

导 师：姜泽辉教授

申 请 学 位：理学硕士

学 科：光学

所 在 单 位：理学院物理系

答 辩 日 期：2015 年 6 月

授予学位单位：哈尔滨工业大学

Classified Index: O44

U.D.C: 537

Dissertation for the Master Degree in Science

**RESEARCH ON RESISTANCE OF GRANULAR
SYSTEM RESPONSE WITH COMPRESSIVE
STRESS**

Candidate:	Jieji Ren
Supervisor:	Prof. Zehui Jiang
Academic Degree Applied for:	Master of Science
Speciality:	Optics
Affiliation:	School of Science
Date of Defence:	June, 2015
Degree-Conferring-Institution:	Harbin Institute of Technology

摘 要

颗粒物质是指尺度在 10^{-4}m – 10^4m 之间固体物质的聚集状态。不同于固体、液体、气体，颗粒物质是一种内部具有强烈耗散作用、非线性的、具有独特运动规律的一类物质，属于软物质的一个分支。这类物质广泛存在于工业生产和日常生活中，从建筑业中的水泥、沙石堆到农业生产中的谷物、瓜果、再到自然环境中的沙尘、泥土都属于颗粒物质的范畴。由于颗粒物质的运动影响着许多自然现象，例如沙尘暴的运动和泥石流的形成，以及谷物存储的粮仓效应和瓜果蔬菜运输过程中的巴西果效应，他们都和颗粒物质息息相关。所以研究颗粒物质的特性对于认识 and 解决这些自然现象有着重要的实际意义。

近年来颗粒物质的独特特性吸引了一批优秀的科学家投身其中，颗粒物理的研究蓬勃发展。但目前对于颗粒物质内部传导特性的研究还不是很充分，特别是对于颗粒物质内部电学传导特性的研究还比较少。颗粒物质的导电特性，不仅与颗粒材料本身特性有关，还与颗粒物质内部颗粒的排布、颗粒间表面的状态、形变规律、与容器的相互作用以及外界的电学、力学扰动有着密切的联系。目前对于颗粒物质内部的导电机制还没有完全厘清，研究也大都集中在金属颗粒上，对于非金属导体的研究较少。同时颗粒物质的传导特性与内部力学结构和受力有着密切的关系，所以有必要研究颗粒物质中力对体系电阻的影响。

本文首先从赫兹接触理论和江森模型出发，推导出了颗粒体系电阻随外界压力的响应关系以及底部饱和压强与自身厚度的变化关系。同时结合两种理论，将外界压力表示成厚度的函数，提出了颗粒体系电阻随体系厚度变化的理论模型。为了验证理论有效性，本文主要测量了颗粒体系在外加连续力作用下电阻的变化情况。首先利用欧姆定律测量了轴向的电阻随压力的变化情况，观察实验现象并总结了实验规律；为了验证和比较不同材料中的变化规律，我们同时测量了竹炭颗粒和导电塑料颗粒。同时，还测量了颗粒体系的横向电阻变化随压力的变化，并利用幂律函数拟合实验结果。通过对实验数据的拟合，发现利用分段函数拟合式与实验曲线符合较好。最后，考虑到体系内应力分布不均，同时测量相同厚度下分层的电阻随外加应力的变化情况，总结变化规律，发现体系内部的轴向受力呈现非均匀变化。进一步测量了准静态下颗粒体系电阻随厚度的变化情况，分析实验曲线发现压力饱和效应，与理论趋势符合较好。

关键词：颗粒物质；导电特性；片层模型；颗粒电阻；压应力

Abstract

Granular materials is a kind of aggregation state which size from 10^{-4}m - 10^4m . It is different from solid, liquid and gas, which have strong inner dissipate and nonlinear special characters. Granular material is a branch of soft materials, which is general in industry and daily life, from concrete to sand in construction to corn and fruit in agriculture, to dust and soil in nature environment. Granular materials impact many natural phenomenon, from sand storm to debris flow, from corn storage to fruit transportation, they are tightly related to granular materials. It is meaningful to research and solve these kind of problems.

Recent years, the special characteristics of Granular Materials attract many outstanding scientists devote themselves into this field, research is hot. But now, research on electrical conductive characteristics is limited. Resistance of granular material is not only related to the materials resistivity, but also affected by their assembly states, surface states and interactivity with extra container. It is unclear of inner conductive mechanism, researches are focus on metal, but nonmetal is limited. It is necessary to research how stress influence granular materials' conductivity.

In this work, based on Hertz contact resistance theory and Janssen Model, we deduced resistance of granular system change with the compressive stress and pressure on bottom change with granular thickness. We also combined two theories, represent pressure of bottom as a function of thickness, then deduced granular system resistance change with thickness. To test the validity of theory, we measured resistance of granular change with continual compressive stress. First, we measured the axial resistance change with pressure, observed the experiment phenomenon and concluded experimental regularities. To verify regularities in different materials, we measured and compared resistance change with pressure in bamboo-charcoal and conductive plastics. Furthermore, we measured transverse resistance change with compressive stress, and fitted experimental data with power-law function. We found use two part power-law functions could fit data better. At last, we separate granular system into layers, measured resistance of each layer. We found resistance change with compressive stress is inhomogeneous in different layer. In addition, we measured resistance change with thickness, and found pressure saturation. After processing, experimental data could fit theory well.

Keywords: Granular Materials, Conductive Characteristics, Slice Model, Granular Resistance, Compressive Stress

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	II
目 录	III
第 1 章 绪 论	1
1.1 课题背景及研究的目的和意义	1
1.2 颗粒体系传导特性和力学特性的研究状况	3
1.2.1 颗粒体系内部的传导特性	3
1.2.2 颗粒体系的力学特性	4
1.3 颗粒体系的电学传导特性研究现状	9
1.4 本文的主要研究内容	11
1.5 本章小结	12
第 2 章 颗粒体系电阻随压应力响应规律的理论分析	13
2.1 赫兹接触理论	13
2.2 颗粒体系内部压力的粮仓效应与江森模型	16
2.3 颗粒体系内部电阻随压应力的响应	18
2.4 本章小结	21
第 3 章 颗粒体系内部电阻随压应力的响应关系	22
3.1 实验原理和实验装置	22
3.2 颗粒体系轴向电阻随压应力的响应关系	26
3.2.1 竹碳颗粒堆的电阻随压应力的响应特性	26
3.2.2 导电塑料颗粒堆的电阻随压应力的响应特性	27
3.3 颗粒体系横向电阻随压应力的响应关系	31
3.3.1 竹炭颗粒堆的横向电阻随压应力的响应特性	31
3.3.2 竹炭颗粒堆的横向电阻随压应力的响应特性分析拟合	32
3.3.3 比较颗粒堆的横向与纵向电阻随压应力的响应特性	34
3.4 本章小结	36
第 4 章 颗粒物质准静态电阻随压力的响应关系	37
4.1 分层测量颗粒体系的轴向电阻随压力的变化关系	37
4.1.1 双层颗粒堆的轴向电阻随压应力的响应特性	37
4.1.2 三层颗粒堆的轴向电阻随压应力的响应特性	39
4.2 PP 颗粒中静态电阻随厚度的变化关系	42
4.2.1 不同厚度 PP 导电塑料颗粒电阻随时间的准静态测量	43
4.2.2 颗粒体系电阻随厚度变化的分析与拟合	45

4.3 本章小结.....	48
结 论	49
参考文献	50
攻读硕士学位期间发表的论文及其它成果	55
哈尔滨工业大学学位论文原创性声明和使用权限	56
致 谢	57

第1章 绪 论

1.1 课题背景及研究的目的和意义

颗粒物质的研究有着悠久的历史，千百年前人们就知道利用颗粒物质的特性来为生产生活服务。中国古代著名的农业生产工具——筛子（簸箕），就是利用颗粒物质的动力学效应——巴西果效应来分离谷物中大小不同的颗粒。长途运输瓜果的过程中，人们发现如果没有固定放置的情况下，较大的瓜果运动到上层，而处在下层的往往是尺寸较小的瓜果。在生产活动中人们还发现，蔬菜堆或者果实堆里，如果堆得过高，首先被压坏的不是处于堆中心的果实，而是靠外位置处的蔬果。在农业生产中还发现，粮仓最容易损坏开裂的地方不是底部而是粮仓的侧壁。还有很多与颗粒物质相关的类似现象都表现出了颗粒物质的奇特性质。其中很多现象目前都没有得到清晰的解释，但具有独特力学构造、动力学特性及传导特性的颗粒物质吸引着一批又一批的优秀科学家投身其中，使之成为了近二十年的物理学前沿的研究热点。

颗粒物质是指由尺寸在 $1\mu\text{m}$ 以上颗粒所组成的宏观体系^[1]。尺寸小于微米量级的颗粒会受到诸如范德瓦尔斯作用力、分子间作用力、液体中的分子还会受到液桥的作用，并且这个尺度下的微粒具有较强的布朗运动。但对于尺寸大于一微米的微粒组成的宏观体系，其势能与热能相比很大，热运动几乎颗粒忽略不计，之间存在这样的比例量级 $mgh/kT \sim 10^{14}$ 。本文所指的颗粒物质主要是指较大尺寸的宏观颗粒体系，其内部存在着较强的耗散作用和内部摩擦力，与外界主要的力学作用形式是非弹性碰撞^[1]。并且在受到外界激励或者加载的情况下，颗粒体系内部存在较多的非线性过程。颗粒物理的研究对象从沙粒、泥土、石块到山体、积雪、浮冰甚至到地壳板块、太空中的小行星，都属于其研究对象。在日常生产生活中，建筑材料如混凝土砂石、医药品如药丸颗粒、谷物粮食如粮仓、矿石燃料如矿石堆和煤炭也是颗粒物理的研究对象。甚至一些社会现象，如人流和交通流、道路交通的堵塞和解堵塞、拥挤人流的动力学过程也都可以利用颗粒物理的研究方法进行处理。

颗粒物质是人类接触、处理和利用最为频繁的物质之一。生活中每天都需要食用的米粒、瓜果、面粉，炒锅里翻动的食物，打扫卫生时的灰尘都是颗粒物质。生产中需要应用的燃料煤炭，冶金工业中需要处理的矿石颗粒，建筑业中广泛应用的混凝土砂石颗粒体系，农业中的粮食贮藏和堆垛，甚至交通运输业中都需要大量面对各种形态的颗粒物质。在创造、处理、运输、贮藏颗粒物质的过程中，需要消耗掉大量的能量和有用的材料。认识和理解颗粒物质的特性和规律就可以帮助我们

减少不必要的损失,提高生产效率。例如怎样堆垛瓜果蔬菜能避免压坏下层的食物,如何调整砂石水泥比例得到更高强度的混凝土,如何有效分离不同的颗粒得到品位更高的矿粒等等都是颗粒物质应用的粒子。而且颗粒物质内部还具有着一些不为人知的相互作用规律,研究颗粒物质的动力学特性、内部的力学构造有助于我们发现其中的规律和特性,并应用于生产实践中,造福人类社会。

除动力学过程外,颗粒体系内部还存在着丰富的传导和输运特性。从声学的振动传导到热学的能量传导,再到电学领域的电导特性以及热电相互作用。颗粒体系内部的力、热、电特性相互耦合,产生复杂的现象。其中,颗粒体系的电导特性会极大地受到颗粒体系内部结构排布、表面特性、力链分布的影响。再加上颗粒物质不同于连续体物质的力学特性,使得体系内部存在受力不均匀的状况,同样致使了内部传导特性的非均匀非线性变化。目前颗粒物质的导电特性在半导体导电薄膜、电子输运方面都有的一定的研究成果和实际应用。但是对于宏观颗粒的导电特性研究还比较有限,仅在金属颗粒体系中有一定的研究,并且没有相关的成熟理论模型进行有效全面的支撑。但是由于颗粒体系内部导电特性和力学结构具有强烈的相互作用,研究颗粒物质的导电特性有助于分析和理解内部力链力网及颗粒之间的相互作用。

研究颗粒物质的导电性是探索颗粒物质内部结构的一个重要途径。目前已有研究小组利用光学的手段,通过压力作用下光折变材料的变化观察颗粒物质内部力链和力网的状态,并获得了较好的结果^[2]。同时也有研究小组利用计算机模拟的过程建立了颗粒体系内部力链和力网的结构^[3],并得到了可视化非均匀分布的内部受力结果。但是这样的方法具有较大的局限性,而且不能与现有成熟的电子电路测量系统相兼容。

本论文研究的目的之一就是利用电学的方法检测出颗粒物质内部受力情况的变化。由于颗粒物质体系的电阻受到压力的影响,在此基础上利用闭合电路欧姆定律测量出颗粒物质的电阻变化,通过测量电阻的变化便可根据数据分析出内部受力的变化情况。通过电学的研究手段,以电阻为研究对象来分析总结颗粒体系的电学传导特性,并探索颗粒体系导电特性和外界应力特别是压应力的关系,是本课题的研究重点。

通过探索颗粒体系内部的导电特性,不仅可以帮助我们更好地认识和利用颗粒体系内部的电学传导特性,更能通过电阻的变化来观察体系内部力学特性的变化,从侧面分析出力链和力网的结构和特性。另外,和其他手段相比电学手段更为方便,测量系统更为精确和成熟,极大地方便了我们对于颗粒体系电阻特性的研究。其优点主要表现在以下几个方面。首先,导电的特性的测量比较方便,理论成熟仪

器先进,精确度足够高,并且有着成熟的测量系统和数据采集系统,易于后期处理;其次,测量颗粒体系的电阻可以用闭合电路欧姆定律来实现,原理简单易于实现;最后,现实情况中可供测量的颗粒比较易得,因为几乎所有材料都具有电阻,所以这种方法具有更普遍的应用价值和工程前景。

研究颗粒体系电阻随压力的变化关系不仅有助于分析颗粒体系的电学特性以及传导特性随外力的响应关系,总结出实验规律,并将规律应用于工程实践中,如非线性传感器、压力传感器的方面。同时,通过电阻与颗粒体系力相互作用的联系还能基于实验数据简介分析颗粒体系内部的力学结构和受力情况,通过电学量表征出内部力的分布以及结构特性。

同时研究颗粒物质的导电特性,可以为已有的模型提供实验支撑。如赫兹接触理论中接触电阻随压力的幂函数变化关系,可以对应到实验中的电阻值随外加压力的变化关系;江森模型中粮仓底部的压力饱和效益,可以通过实验中对电阻饱和值的测量来得到。

通过探索颗粒物质内部的电阻随压应力的相应特性,能加深对于体系内部力学结构物理图像的认识,有助于建立更完善的物理模型去分析解决体系内部的问题,更为透彻地理解、掌握、运用其中的规律。

1.2 颗粒体系传导特性和力学特性的研究状况

1.2.1 颗粒体系内部的传导特性

颗粒体系和固体、液体和某些气体一样,也能够传导热量、弹性波以及电场。目前颗粒体系内部的传导特性研究主要集中在声学振动传导、力学受力传导、热量传导、以及本文研究的电学传导等方面。

颗粒体系内部的密度不均匀会向周围传导。Louis 等人研究了颗粒堆内部的密度不均匀性,以及这种能量密度在颗粒内部的传导特性,提出了传导系数和衰减系数,并建立了一套公式和理论来解释干颗粒体系崩塌的过程^[4];

颗粒体系也能传导热量,并且能和压力和电压电流相耦合,相互作用。Danial 等人研究了应力作用下颗粒体系内部热传导的过程,提出了描述水平方向和竖直方向上的热传导随着外界压力增加的关系,建立了理论模型并进行了实验,验证了各项异性热传导对非轴向压力的响应特性^[5]。Yun 等人通过实验测量了不同成分的土壤热传导特性,并且证明了其中的液体在热传导中起到了关键性的作用,并且测算出了土壤中各种成分对热传导系数影响的大小关系^[6]。Anil 等人利用热力学为基础的非线性速率依赖模型和微结构力学,发展出了一套解释颗粒内部塑性形变和损伤的模型,研究发现外部加载致使颗粒内部产生了各项异性,从而导致了损伤

和塑性形变^[7]。Meilikhov 研究了高温下颗粒体系的热传导特性，提出了不同于低温下的理论模型，并对其进行了验证^[8]。Kuchanov 等人研究了含有被动添加剂颗粒物质中的热传导特性，研究了横向扩散和热输运过程，发现物质和热量的输入和添加剂层颗粒相关^[9]。Ordóñez-Miranda 研究了颗粒体系内部的热传导特性，他们认为热传导不仅与体系的热导率、扩散率、热容量有关，还与体系的时间相位滞后有关，他们利用热波共振腔测量了颗粒物质的时间相位滞后和热扩散系数，并且得到了非傅里叶传输的实验理论，以及颗粒物质的热学特性^[10]。Beloborodov 等人研究了金属颗粒体系内部的电学输运和热力学性质，综合考虑了颗粒间的相互作用和波动，考虑了局域效应和量子力学效应，得到了颗粒体系内部的电学输运过程和热力学特性^[11]。关于电学传导特性将在下一节详细介绍。

1.2.2 颗粒体系的力学特性

颗粒体系内部具有很强的相互作用，其中摩擦力在其中起到主要的作用。颗粒体系内部主要存在以下几种力学特性：粮仓效应、巴西果效应、振动情况下的倍周期分叉效应、颗粒堆底部的压力凹陷以及颗粒物质内部的成拱和力链结构、压力作用下体积膨胀和颗粒流中的阻塞解阻塞现象，这些现象十分独特和丰富，引起了科研人员的极大兴趣。

颗粒体系中的粮仓效应是指在粮仓底部所受到的压力存在饱和值。同样直径下，达到饱和压力后粮仓底部所受压力不随粮仓的高度变化。这主要是由于颗粒内部之间颗粒与器壁之间存在摩擦力相互作用。一部分颗粒竖直向下的摩擦力被转移到了水平方向上，所以一部分颗粒的重力由器壁摩擦力所抵消。开始堆积颗粒的时候，侧壁摩擦力的影响较小，容器底部的压力随着颗粒高度的增加而增加。但当颗粒体系到达一定的高度后底部的压力便不再增加，底部压力存在着明显的饱和现象。1895 年工程师江森（Janssen）首先注意到了这种现象，并利用连续体弹性力学理论建立了江森模型描述粮仓底部受到压力随粮仓内颗粒高度的变化，很好地解释了这一现象。陆坤全等在文献中给出了江森模型的简单计算方法^{[1]632}。下式为简化的江森模型公式：

$$p(z) = p_s(1 - e^{-\frac{z}{h}}) \quad (1-1)$$

其中 h 为容器内颗粒体系特征高度，其中 $h = R/2\mu K(m)$ ，

-- R 为容器底面半径， K 为水平压力转换系数， μ 为侧壁摩擦系数；

-- p_s 为容器底部饱和压强， $p_s = \rho gh(N/m^2)$ 。

从上面的式子里可以看出，当 $z \ll h$ 时，去极限后 $p(z) = \rho gz$ ，对应于颗粒体

系高度较小时，即在颗粒体系较浅填充较小层数时，容器底部压强与颗粒高度成正比，这类似于液体压强计算公式；当 $z > h$ 时， $p(z) \rightarrow \rho gh = p_s$ ，对应于颗粒体系厚度大于特征高度时，容器中有较厚的颗粒时，容器底面压强趋于饱和。一般 K 为 20%~30%，而 μ 一般小于 0.5，可以估算出颗粒体系压力饱和效应的特征高度大概为容器底面半径 R 的 3~5 倍。

上式较为完整的解释了颗粒体系内部的压力饱和效应，从分析中可以看出饱和和高度的大小容器的直径和器壁摩擦力 μ 颗粒内部相互作用 K 有关。直径越小器壁摩擦力越大的容器，底部所受到的压力就会随之变小。同时侧壁越粗糙那么受到的侧壁摩擦力越大，被分担的重力越多，饱和高度就会越小。这些结果都符合我们基于常识的判断。颗粒体系不像液体底部压强随液体高度（深度）线性变化的原因主要在于液体内部不存在剪切力。而颗粒内部剪切力的存在使得一部分摩擦力可以对颗粒体系产生作用，抵消了一部分重力的影响。但是需要注意的是江森模型对于压力的假定是模型成立的关键，但是我们无法确定水平应力转换系数和在侧壁上是否达到最大静摩擦，并且也无法确定横截面上的应力均匀。这些是江森模型有待完善的地方。

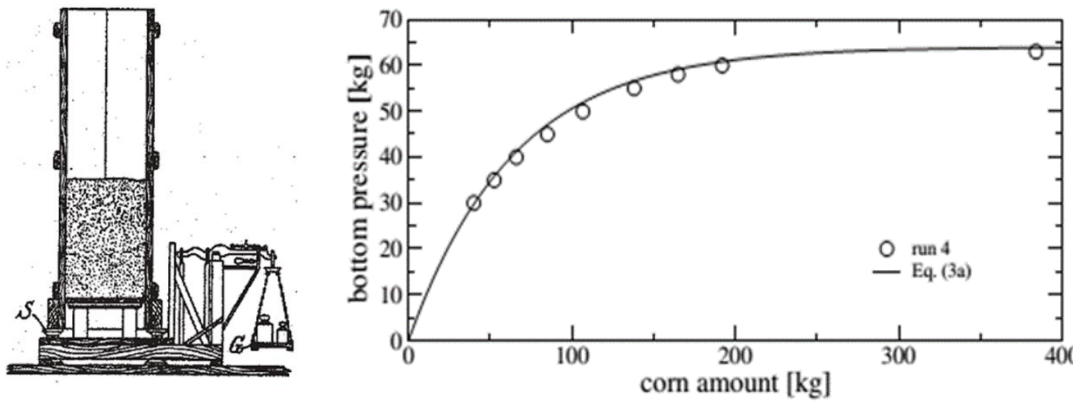


图 1-1 粮仓效应的实验装置和底部的压力饱和曲线（Janssen 模型）^[12]

除了粮仓效应，颗粒体系中还存在的内部摩擦还会造成沙堆呈现出相同的倾止角度。沙堆在不断添加沙粒时会在静止角和崩塌角间来回波动，使得沙堆的堆积角度保持在一个特定的范围内。当不断添加沙粒时，一旦沙堆的堆积角超过崩塌角那么沙堆就会立即崩塌达到一个较小的静止角后稳定。两个角度的差别很小，只有沙堆很大的情况下才有两度左右的区别。库伦认为沙堆的堆积角与倾斜面上的应力有关，正应力 σ 通过摩擦力转化为了切应力，从而导致了沙堆的崩塌。

$$\tau = \mu_i \sigma_n = \tan \theta_m \sigma_n \quad (1-2)$$

上式中 μ 为摩擦系数， θ 为崩塌角， σ 正应力， τ 为切应力。沙堆中的崩塌和静止

角,堆积角度的关系是一个十分重要的现象。Per Bak 以此提出了自组织临界现象。并且还发展了一整套理论介绍这种类似进化的过程,阐述了系统间相互作用,共同演化的过程^[13]。

颗粒体系内另一重要的力学特征就是压力凹陷效应。依据我们的常识,颗粒体系底部在中心点的地方受到的压力一定是最大的。而根据实验结果,却发现颗粒体系底部的中心点恰恰是压力的极小值点。这和我们的观念相违背,但这就是颗粒位置的奇妙所在。Loic Vanel 等人进行了实验发现在锥形和楔形沙堆中都存在压力凹陷效应^[15]。他们在试验中发现如果换成均匀的沙粒下落,压力凹陷就不明显,而点源或者线元的下落就会长生明显的压力凹陷效应。实验结果如下图所示:

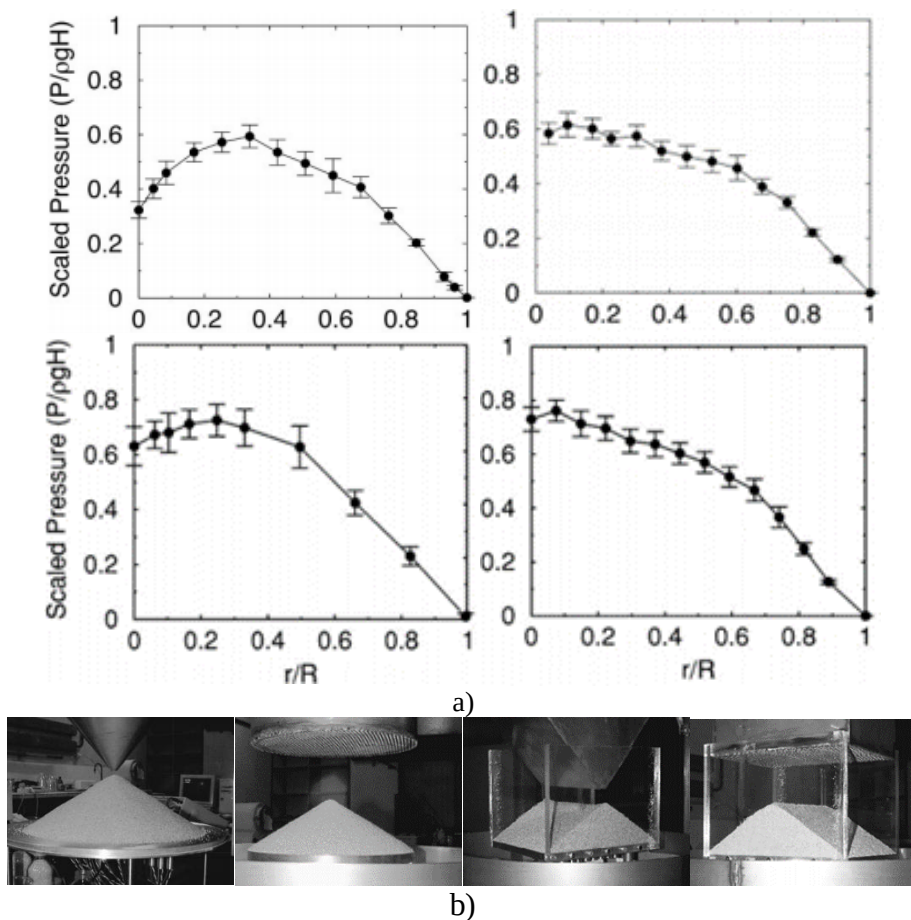


图 1-2 上图分别是 Vanel 等人试验中的沙堆和底部压力状况^[15], a)中从左到右从上到下的曲线对应示意图依次如图 b)四个分图所示。

为了解释压力凹陷效应, Vanel 等人提出了颗粒内部的局域成拱和力链过程。他们认为当点源式沙堆下落时,会在中心处形成局域的力链结构,并且这些力链会在局域成现出拱形结构,形成一种壳套效应,并且不断积累使得中间的颗粒所受到的压力被分担到了周围。由此长生了中心压力凹陷效应。J. P. WITTMER 等人提出了一种基于连续体力学的模型来解释这一现象,在其中插入了拱状模型,并认为应

力轴和垂直方向有一固定倾角。并分别解释了二维和三维的压力凹陷情况^[16]。Hans-Georg Matuttis 还基于分子动力学理论和凸多边形的假设,利用数值模拟的方法验证了这种压力凹陷存在的效果^[17]。

颗粒体系不同于常规物体的另一特性表现在颗粒内部的受力不是均匀的,而是以力链和力网的形势存在。颗粒体系内部的颗粒互相支撑,将力的相互作用层层传递到容器或者是支撑面上。由于摩擦力的存在,颗粒体系内部的力的传递不会均匀分布的,而是具有一定取向的。在一定的方向上摩擦力较大或者是角度合适,力在这个方向上就会被较多的分担,力链就会被强化,从而产生较强的局域非均匀力场。Robin.C 等人研究了颗粒体系内部的应力场,分别研究了细光滑颗粒和粗糙颗粒在固液边缘的边界效应和应力传递方式^[18]。James W 等人研究了颗粒体系收到容器的影响^[19]。利用分子动力学的方法模拟了三维情况下颗粒之间,颗粒与器壁之间的相互作用。结果显示容器内压力随高度变化的规律符合江森模型,颗粒与容器壁之间的相互作用符合库伦规范。但是研究发现位于颗粒顶部的流体静力学区域无法用江森模型解释,原因是这个区域的切向力已经超出了库伦屈服的范围。在力较大的情况下,相互作用呈现出指数变化规律,与之前的研究结果相符。另外 H P Zhu 等人提出了平均场方法来处理颗粒体系内部复杂的变量,特别是流动情况下,得到了较好的处理效果^[20]。Hisao Hayakawa 提出了一个简单的理论模型,解释了颗粒体系的摩擦力以及从固态向流态转变的过程,证明了颗粒中的滞后与推力相关^[21]。

人们发展了很多方法来观察颗粒体系内部的应力变化和分布,最为常用的是利用具有光弹效应的光学材料填充于容器中,利用压力作用下光学特性发生的改变,通过光学手段甚至肉眼便能观察颗粒物质内部力链和力网的结构。

由于光弹材料在压力作用下折射率会发生较大变化,其发生应力双折射内部的折射率分布变成各向异性,会对传播其中的光起到偏折作用。利用光学手段,如正交的起偏器和检偏器对,通过偏振光便能观察其中力链的分布。

H. P. Rossmanit 等人利用光弹材料研究了动态加载下的颗粒物质响应特性^[22]。C.-h.Liu 等人利用光弹材料研究了颗粒体系内部应力的分布以及力链和力网的结构特征,通过实验观测和数值模拟后指出颗粒间的相互作用力在较大力作用下符合指数特征。并重新建立了理论模型,研究发现颗粒体系内部的力链力网结构来自于颗粒间的相互作用和力平衡^[23]。T Aste 等人利用光弹材料成功的观察到了颗粒物质中的力链结构,并建立了基于光弹效应的理论模型,研究发现了受力作用有着指数函数形式的分布,并且颗粒的脆性还和颗粒层的粗糙程度有关,同时受到局域重构和外力变化作用的影响^[24]。Jie Zhang 等人利用光弹材料成功的表征出了颗粒

体系内部的力链力网机构，如图 1-3 所示^[25]：

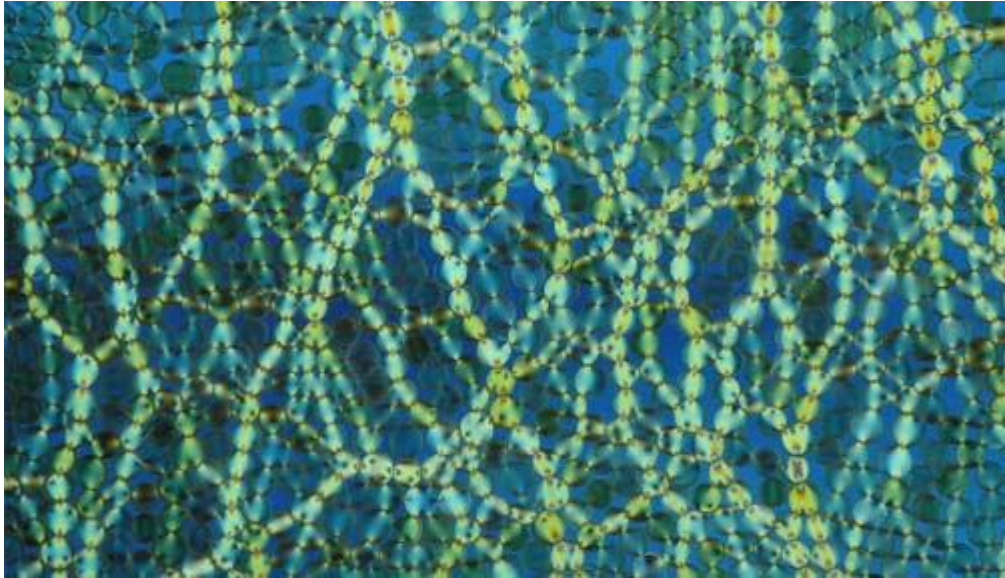


图 1-3 利用光弹效应得到的力链力网结构^[25]。

Jacqueline Krim 等人利用光弹材料模拟了下图所示的颗粒堆中的力链结构（白色线条）如图 1-4 所示^[26]。此外很多类似的实验都给出了相似的结果，能在颗粒物质中观察到明显了力链力网结构^{[27][32]}。

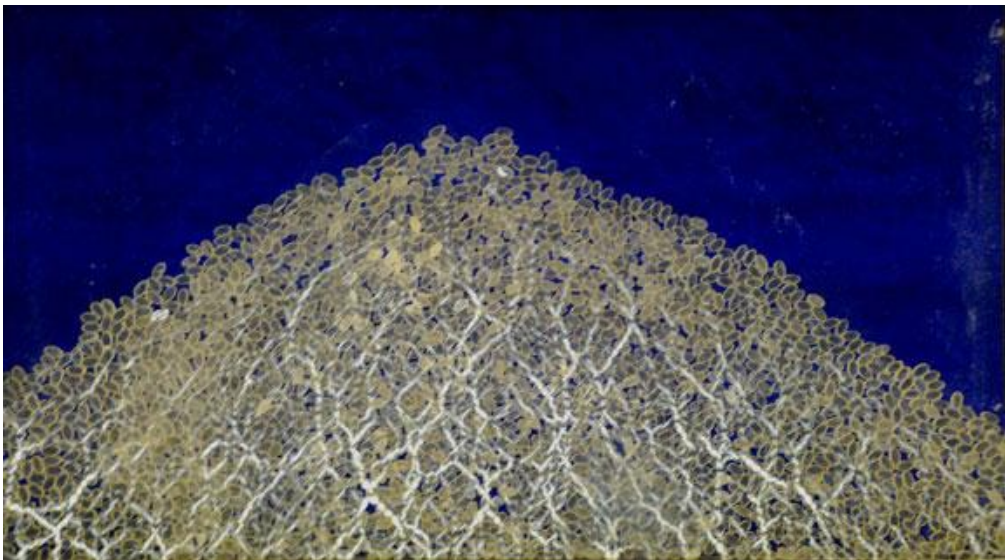


图 1-4 颗粒堆中的力链力网结构^[26]

在实验模拟方面，孙其成等人利用计算机得到了颗粒物质静态堆积时的力链和力网结构^[3]。David M. Walker 等人利用模拟得到了近摩擦情况下颗粒物质内的力相互作用。Ning Guo 等人利用离散元的方法，在计算机中模拟了剪切力导致的各项异性，并得到了可视化结果^[34]。同样的结果也呈现在 Maya Muthuswamy

等人对力传导特性的研究中^[35]。

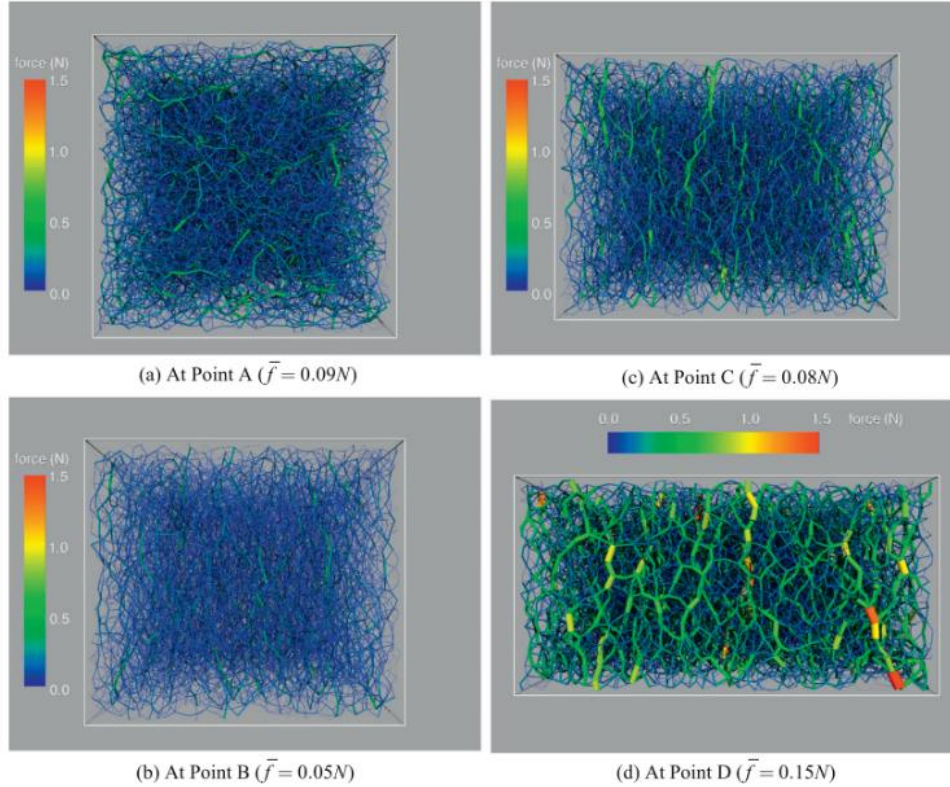


图 1-5 剪切力引起颗粒内部的各项异性^[34]

颗粒体系内部的力学特性十分独特和丰富，主要来自于颗粒间的摩擦力，与容器的相互作用，以及表面接触状况等等，上面综述了几点颗粒物质内部的力学效应和研究进展，下文则开始介绍颗粒物质内部传导特性的研究现状。

1.3 颗粒体系的电学传导特性研究现状

导电颗粒堆具有良好的可测量的导电特性。这样的导电特性不仅与构成颗粒体系的颗粒本身的电导率有关，同时还和颗粒间接触的表面积，相互作用力大小以及表面状况等强烈相关。颗粒体系内的力链和力网强烈的影响着真个体系的电学特性，例如电阻值的大小。1890 年，布冉利发现金属碎屑的导电性对于外界电磁场极度敏感^[36]。填充金属碎屑的管子在附近电火花的作用后，随着电磁波的传播电阻管的电子就会随之下降几个量级。利用这种效应，马可尼后来制备出了填充镍和银屑的粉末检波器，根据布冉利效应来检测无线电信号，人类从此走向了无线通信的时代^[37]。

尽管从 19 世纪末期人们就开始利用颗粒体系的电学传导特性来进行无线通信了，但是对于其中的绝缘-导通机制还不是特别清楚。目前的研究主要集中在对于

颗粒体系从绝缘态到导通态的转变过程。其一是研究颗粒体系在电磁场作用下-的影响,其二是研究将颗粒直接加载在电源作为负载的过程。研究发现这个过程极大的依赖于电压增加到一定幅度后颗粒间发生的局域微焊过程^[38]。金属导电颗粒的导电机理十分复杂,内部的伏安特性还存在着强烈的非线性过程和记忆效应,其中接触电阻扮演了重要的作用^[39]。S. Dorboloa 等人研究了颗粒物质内部伏安特性的突变和滞回特性,通过观察伏安特性得出了描述低损耗接触的网络体系,同时也得到了重要的参量,即内部的电场控制颗粒体系内部的类二极管和扩散状态。D. Bonamy 等人研究了热影响下的颗粒体系电导特性的随机波动,提出了模型来描述这一波动^[40]。Castaing 等人研究了铜粉的导电特性,发现其中的伏安特性是非线性的,绝缘态到导通态的转变十分迅速,之后还会生长具有自相关特性的随机噪声。研究发现其中的热耗散在导通的建立和破坏,在噪声的产生,以及颗粒的不稳定性具有十分重要的影响^[41]。V. Ambegaokar 等人对随机连接的导体网络进行了数值模拟,发现网络的电阻随着个体间分离距离的增加呈指数下降。同时还比较了不同方法对于无定形态内部电阻跃变得处理方法。利用渗透理论建立的模型较好的符合了数值模拟的结果^[42]。V. Da Costa 等人研究了颗粒表面的特性对电阻的影响,具有氧化层的量子隧穿电流统计分布具有 4 个数量级的宽度^[43]。颗粒物质的导电特性强烈依赖于形成的历史和微观结构,很多情况下人们都会怀疑实验是否可重复。M. Creyssels 等人建立了在压力作用下的一维的线性链模型和二维的栅格模型,得到了与实验结果相符的理论解释^[36]。

由于电流的热效应存在,在电流加载下的颗粒体系中具有一定的温度分布。D. Vandembroucq 等人研究了颗粒物质中的导电路径,利用热成像的方法首次得到了 2 维颗粒体系中的导电路径,并观察到了电流的跃变^[44]。Jing Zhang 等人利用离散元的方法模拟了颗粒材料中的电流分布路径,并且得到了温度在颗粒体系中的分布图样,同时探索了颗粒体系导电性和相对密度的关系^{[45][46]}。Bourbatache 等人建立了电流在颗粒物质中的传导路径模型,并利用离散元方法模拟了应力作用下内部电学特性的变化情况^[47]。

另外在一维情况下颗粒的非线性导电性也有很多工作进行了有益的探索和数值模拟。其中 Falcon 等人研究了一维介质的非线性导电特性^[48], Bequin 等人研究了一维金属球链的电导特性,探索了周期性直流电和电磁脉冲的影响^[49]。颗粒物质中导电性的跳变和低温下电压调制的电导也被深入地研究过^{[50][51]}。还有科研人员研究了颗粒物质导电的理论基础^{[52][56]}、应力突变^[53]高温下的颗粒物质的电导特性^[54]以及体系内部氧化物对颗粒物质特性造成的影响^[55]。Ricklet 等人对颗粒体系中的热导和对流特性进行了模拟分析^[57]。

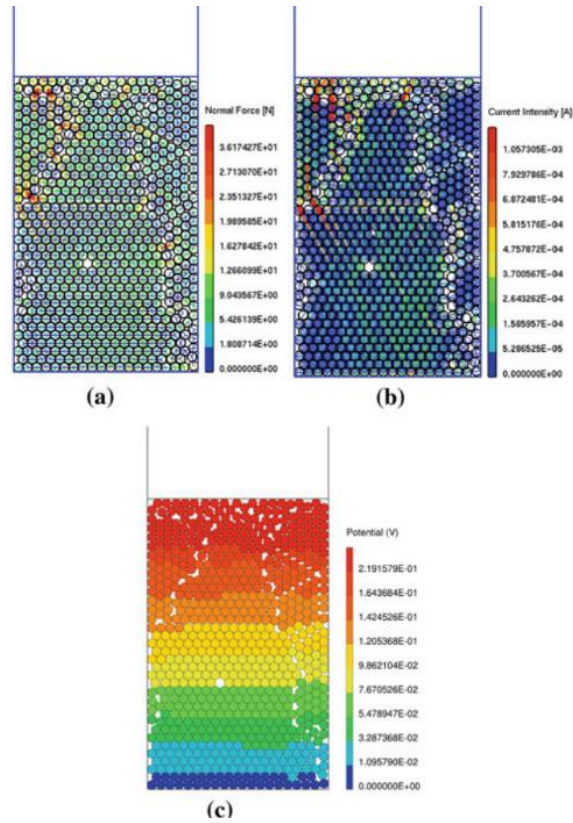


图 1-6 数值模拟应力作用下颗粒物质中应力和电流的分布情况^[47]

目前的对颗粒物质导电特性的研究以及颗粒物质的电学特性力学特性的耦合主要集中在金属颗粒。但是由于金属颗粒电阻过小而且容易氧化，再加上模量较大，压力作用下形变不明显，所以并不是较好的选择。

目前国内对于颗粒物质导电特性的研究较少，很少有论文报道颗粒物质导电特性与力链的相互作用。我们采用竹炭和导电塑料颗粒进行动态加载下的电阻测量，不仅因为这个方面鲜有研究，更应为竹炭和导电塑料本身电阻较大（竹炭 10^3 ，导电塑料 10^4 ），加载下形变和电阻变化较为明显。而且易于获得，不会受到氧化等环境因素的影响。

1.4 本文的主要研究内容

本课题的研究内容主要是针对颗粒体系的电阻特性在外加应力作用下的变化情况，在不同厚度、不同方向、不同层数上展开的。课题组之前主要研究了竹炭颗粒体系在敲击状态下，重构后电阻的变化规律。在固定颗粒厚度的情况下测量了颗粒体系的电阻随外界压应力的响应情况。

本论文研究了粒体系电阻值对压应力的响应情况，由于实验装置的底面积保

持一致，压应力与压力成正比，于是我们将研究变量设定为压力。实验测量了颗粒体系电阻随外加连续压力的变化情况。此部分的内容分为两个方面，首先测量颗粒物质在压力方向上（轴向）的电阻随压力的响应关系得到了随压力变化的电阻曲线；为了研究颗粒体系在不同方向上电阻值的变化规律，实验还测量了与压力作用方向垂直的水平方向上，体系电阻随压力的变化情况，并与纵向电阻的变化曲线做了对比。并排除了轴线形变的影响。本文还对比了竹炭和导电塑料随压应力变化的关系，验证了这种关系在导电颗粒中存在的普遍性。

为了验证颗粒体系内部压力不均匀分布，证明颗粒体系内部受力的不均匀性，将颗粒体系分成多层来进行测量。实验中同时测量了不同层颗粒的电阻随压力的变化。对颗粒体系分为两层和三层测量，并分析了插入电极对电阻测量的影响。通过测量研究颗粒体系在竖直方向上电阻的非均匀变化来表征和分析颗粒体系内部非均匀各向异性的力学结构。随后还测量了不同厚度颗粒在准静态情况下的电阻值，分析了颗粒体系在无外力加载下内部电阻和力的分布规律。

基于分层实验和准静态电阻随厚度的变化最后提出了片层模型理论，结合赫兹接触理论和电阻定律，推导出了颗粒体系准静态电阻随高度变化的非线性公式以及随压力变化的电阻响应公式，并与实验进行了比较。

1.5 本章小结

本章主要介绍了颗粒物质的范围定义和研究背景。着重介绍了颗粒物质中所具有的特殊力学性质和传导性质，介绍了相关领域的研究进展。颗粒物质广泛存在于生产生活中，具有与连续体介质，如固体、液体、气体不一样的特性。在力学上存在粮仓效应和压力凹陷效应，以及动力学上的巴西果效应，倍周期分叉效应。无线电检波器就是基于布冉利效应制成的器件，在无线通信中有着广泛的作用。颗粒体系在工程实践中研究较多，但是内部的传导特性研究较少。颗粒体系内部的力学、电学、热学特性存在强烈的耦合和相互作用。本文利用测量颗粒体系电阻的方法探索了颗粒体系内部电阻随应力的变化关系，并以此为基础分析颗粒体系内部力学结构特性。

第 2 章 颗粒体系电阻随压应力响应规律的理论分析

为了在探索颗粒物质内部电阻的随压应力的响应关系，我们分析了颗粒物质内部的受力情况，从赫兹接触理论出发结合电阻定律，推导出了颗粒体系在压力加载作用下的电阻变化关系。同时，我们利用片层模型描述了颗粒物质内部电阻随高度的变化，并且得到了解析的表达式。

2.1 赫兹接触理论

颗粒体系内部由于颗粒间的接触面积受到压力作用产生形变，所以接触电阻会在压力的作用下发生改变。颗粒体系电阻的变化很大程度上来源于颗粒间接触电阻的变化，我们需要研究接触电阻和作用力之间的关系。赫兹从弹性力学出发，利用一个刚性球和弹性平面相接触，得到在压力作用下接触面积的变化关系。基于电阻定律便可以得到电阻随压力的变化关系。

设力作用于某一无限大的弹性平面上，则此平面受力后的形变如图 2-1 所示，其中力作用的方向是 Z 方向，垂直平面向下。

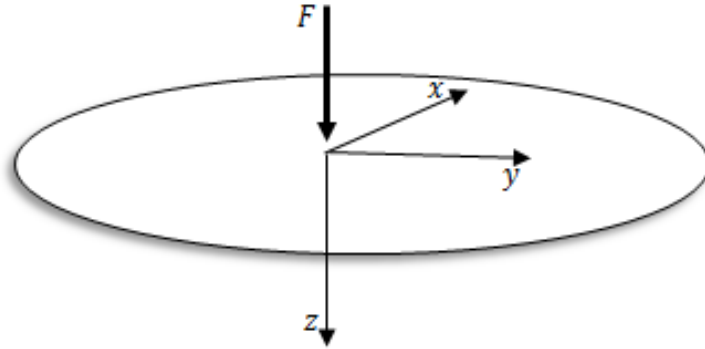


图 2-1 力作用于弹性平面

从弹性力学的理论出发，我们可以得到力作用下的形变表达式：

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)x}{r(r+z)} \right] F_z \\
 u_y &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)y}{r(r+z)} \right] F_z \\
 u_z &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{z^3}{r^3} \right] F_z
 \end{aligned} \tag{2-1}$$

E 为杨氏模量； ν 为泊松比； u 为形变位移(m)； F_z 为 z 方向分力(N)。

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为观察点到原点的距离。

在 $z = 0$ 表面处将上式中的 z 消去，可得表面处形变：

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{x}{r^2} F_z \\ u_y &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{y}{r^2} F_z \\ u_z &= \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{1}{r} F_z \end{aligned} \quad (2-2)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为平面内观察点到中心坐标原点的距离。同样我们将上式拓展到多个力的情况下，可以得到多束力的作用效果。当力很多时，在平面上就会形成一个压强场 $p(x,y)$ 。

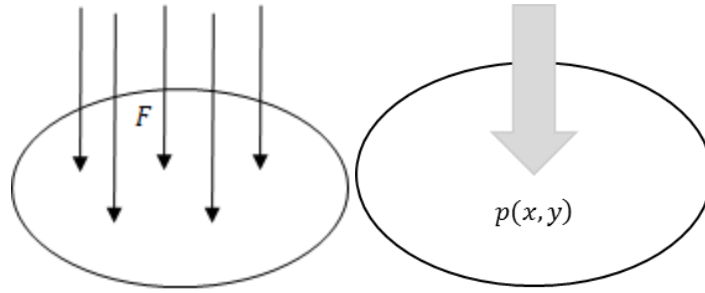


图 2-2 多束力作用于平面及其等效压强

形变结果为各个力的综合。如果平面内的形变较小，即可视为 dz 为零，那么上式可以化简为：

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1}{\pi E^*} \iint p(x', y') \frac{dx' dy'}{r} \\ r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)}$$

设压强在接触区域内连续均匀分布，将压强表示为：

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (2-4)$$

其中 p_0 为接触区域中心处的压强(单位，N/m²)； a 为接触作用区域半径(单位/m)。于是纵向形变为：

$$u_z = \frac{\pi p_0}{4E^* a} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a \quad (2-5)$$

相互作用接触区域内的合力可以表示为：

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2 \quad (2-6)$$

同样我们将上式代入到半径为 R 的刚性球与弹性平面的接触，如图 2-3 所示：

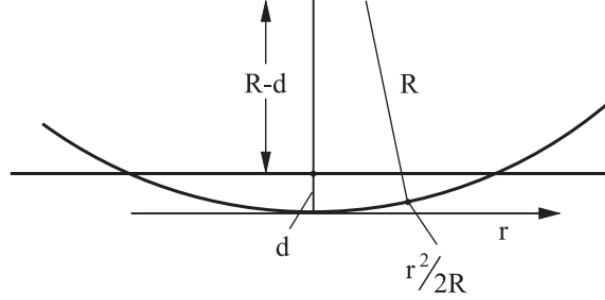


图 2-3 弹性球与刚性平面接触的形变位移几何示意图^[59]

通过三角形内计算出形变区域中心点处的位移^{[58][59]}为：

$$u_z = d - \frac{r^2}{2R} \quad (2-7)$$

根据式上式结合前式，可得：

$$\frac{\pi p_0}{4E^* a} (2a^2 - r^2) = d - \frac{r^2}{2R} \quad (2-8)$$

利用边界条件求解，当观察点分别处于中心和边缘处，即代入 $r=0$ 或 $r=a, d=0$ 时：

$$d = \frac{\pi p_0 a}{2E^*} \quad (2-9)$$

$$a = \frac{\pi p_0 R}{2E^*} \quad (2-10)$$

由式(2-9)和式(2-10)可得：

$$a^2 = Rd \quad (2-11)$$

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2} \quad (2-12)$$

将式(2-11)，式(2-12)代入式(2-6)，可得：

$$F = \frac{4E^*}{3} R^{1/2} d^{3/2} \quad (2-13)$$

由式(2-13)和式(2-11)可得接触区域的半径：

$$a = \left(\frac{3FR}{4E} \right)^{1/3} \quad (2-14)$$

那么接触区域的面积为：

$$S = \pi \left(\frac{3FR}{4E} \right)^{2/3} \quad (2-15)$$

上式便是在力作用下接触区域表面积随作用力的变化关系。

2.2 颗粒体系内部压力的粮仓效应与江森模型

在圆柱形容器内，随着压力的增加颗粒体系对容器底部的压力逐渐趋于饱和，这就是粮仓效应。1895 年德国工程师江森（H.A. Janssen）发表了关于颗粒体系底部的压力饱和效应，随后又依据假设推导出了描述这一现象的江森公式^[60]。江森模型及其理论公式至今仍被广泛应用于工程实践中。关于侧壁摩擦力和江森模型对颗粒体系的影响方面已有很多的理论研究成果^{[61][66]-[73]}。

我们的颗粒体系中同样存在粮仓效应，侧壁摩擦力分担了颗粒的重力以及外界的压力加载，极大地影响着颗粒体系电阻随压力变化的特性。有必要解释江森公式并将其带入到我们的理论中去。

设在半径为 r 的圆柱形容器中充满了颗粒物质，我们深度为 z 处的一个薄片体积元作为我们的体积微元。根据弹性力学的理论，设竖直方向上的主应力为 σ_{zz} 水平方向为 σ_{rr} ，江森为了简化模型的推到做出了以下几个假设：

- (1) 在颗粒物质内部的水平横截面上， σ_{zz} 和 $\sigma_{rr} = K \cdot \sigma_{zz}$ 都为均匀分布的主应力， K 是应力转化系数；
- (2) 颗粒体系与侧壁的摩擦为静摩擦，来自侧壁的剪切应力 $\tau = \sigma_{rr} \cdot \mu$ 。颗粒体系在圆柱形容器内的受力如下图所示：

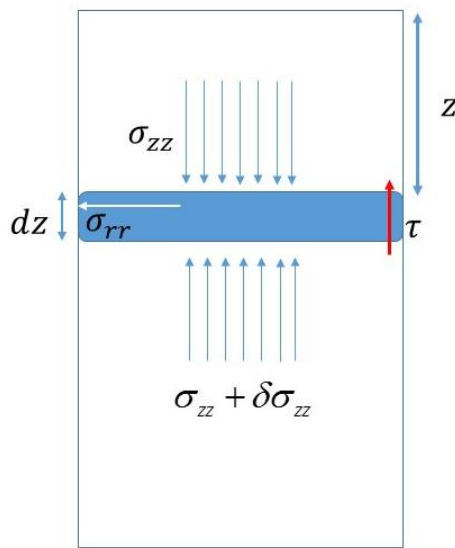


图 2-4 颗粒体系中的粮仓效应

我们在颗粒体系内部深度为 z 处取一薄层 dz ，其上表面受到应力为 σ_{zz} ，下表面受到应力为 $\sigma_{zz} + \delta\sigma_{zz}$ ，同时还受到侧壁的摩擦力，摩擦力由侧壁的剪切应力 τ 提供（具体计算时我们可以将摩擦力简化为水平受力与静摩擦系数的乘积 $\tau = \mu\sigma_r = K\mu\sigma_z$ ）如图 2-4 所示。于是考虑到上下表面应力的差值和重力侧壁摩擦力的作用，设容器底面半径为 r ，重力加速度为 g ，颗粒体系的平均密度为 ρ ，设向上为正方向，由弹性力学理论出发利用摩擦力应力和重力的平衡，得到微元的力平衡方程为：

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{zz}\pi r^2 + \tau 2\pi r dz &= \rho g \pi r^2 dz \\ \rho g r - 2\tau &= \frac{\delta\sigma_{zz}r}{dz} \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dz} &= \rho g - \frac{2\tau}{r}\end{aligned}\quad (2-16)$$

设 $h = \frac{r}{2\mu K}$ 为饱和深度，解上述微分方程得到了

$$\sigma_{zz} = \frac{\rho g r}{2\mu K} + ce^{-\frac{2\mu K z}{r}} = c_1 + ce^{-\frac{z}{h}} \quad (2-17)$$

其中 C, C_1 为常数， h 为饱和深度。将应力乘上一个常数因子（恒定的作用面积）即为轴向的压力，同样与深度成 e 指数函数的关系。上式中 c 为待定常数 $c_1 = \rho g r / 2\mu K$ ，可利用边界条件解出。设在颗粒体系顶部加载一外力 F ，则当 z 为 0 时顶部受力为 F ，边界条件 $\sigma_{zz} = f = \frac{F}{\pi r^2}$ ，则可得到上述方程的系数：

$$\begin{aligned}c &= f - c_1 \\ \sigma_{zz} &= \frac{\rho g r}{2\mu K} (1 - e^{-\frac{z}{h}}) + fe^{-\frac{z}{h}}\end{aligned}\quad (2-18)$$

上式为轴向应力的表达式，同时我们还能得出水平应力和摩擦力的表达式：

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} = \sigma_{zz} K &= \frac{\rho g r}{2\mu} (1 - e^{-\frac{z}{h}}) + Kfe^{-\frac{z}{h}} \\ \tau = \sigma_{rr} \cdot \mu &= \frac{\rho g r}{2} (1 - e^{-\frac{z}{h}}) + \mu Kfe^{-\frac{z}{h}}\end{aligned}\quad (2-19)$$

当深度 z 趋于无穷时，上述表示应力和摩擦力的式子会变为与深度无关的常数，趋向于饱和。在没有外力作用的情况下粮仓底部和侧壁的应力趋向于：

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_{zz} &= \frac{\rho g r}{2\mu K} \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_{rr} &= \frac{\rho g r}{2\mu} \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \tau &= \frac{\rho g r}{2}\end{aligned}\quad (2-20)$$

从上式可以看出容器底部受到的轴线应力和水平应力都在厚度增加到一定程度后趋近于一个常数。这个常数与容器的底面直径成正比，侧壁摩擦系数成反比。结果与我们的日常经验相符，底面积越大盛放的颗粒越多，底部受到的压力也就越大。

我们利用数值模拟的得到粮仓效应颗粒体系底部的压力随深度增加的关系，如下图所示：

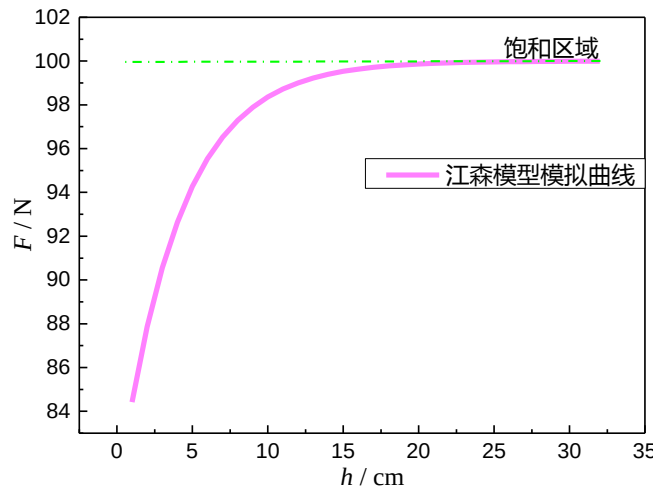


图 2-5 江森模型的数值模拟曲线

图中我们可以明显的看到随着压力的增加图中的底部受力曲线趋近于饱和值。在超过饱和深度后，图中的曲线开始出现拐点并逐渐趋于饱和值。江森模型给出了压力随深度（厚度的相同表述）变化情况，作为理论模型的基础加入到下面的理论推导中。

2.3 颗粒体系内部电阻随压应力的响应

从赫兹接触理论推出的接触表面积随压力变化的关系，我们可以结合欧姆定律得到电阻随压力的变化关系。设颗粒物质放置在圆桶内部，其中在加压的过程中不发生较大的扰动。最大压力作用线颗粒物质还处于弹性形变的范围内不至于发生破裂，产生新的接触点。并且在加压过程中接触点的数目保持稳定（准静态过程）。在这些假设的基础上，我们设圆柱形容器中有一厚度为 dz 的颗粒物质，受到

的压力为 F ，这一层内接触点的面积数目固定，并且接触总面积为 S ，颗粒物质的平均密度为 ρ_0 ，其电阻率平均为 ρ ，我们得到此薄层颗粒的电阻为：

$$R_{dz} = \rho \frac{dl}{S} \quad (2-21)$$

将接触面积随压力的变化关系 $S = \pi(\frac{3FR}{4E^2})^{2/3}$ 带入上式，得到下面的表达式：

$$R_{dz} = \rho \frac{dz}{\pi(\frac{3FR}{4E^2})^{2/3}} \sim C_1 F^{-\frac{2}{3}} \quad (2-22)$$

其中 C_1 为 $dz \cdot \rho \pi (\frac{3R}{4E})^{-\frac{2}{3}}$ 在颗粒特征尺寸 (R) 相同并且同种材料的时候为常数。

此时这一片层的压力来自两部分构成，其一来自于外界的压力 f 变化，其二来自于颗粒层上部的颗粒随此处的压力作用。需要注意的是，此片层处深度为 $H-Z$ (Z 为其高度, H 为颗粒体系整体高度) 在压力传递的过程中，需要注意粮仓效应的影响。根据江森模型式(2-18)取简化公式，得无外压力时上部颗粒对此片层处的压强为：

$$p(z) = p_s (1 - e^{-\frac{z}{h}}) \quad (2-23)$$

其中 h 为特定容器（半径为 r 的圆柱形容器）中颗粒体系的特征饱和高度，其中 $h = r/2\mu K(m)$ ； p_s 为颗粒体系底部的饱和压强， $p_s = \rho gh(N/m^2)$ ， z 为深度 ($H-Z$)，则这一部分力的大小为：

$$f_g = p(z)S = p_s \left(1 - e^{-\frac{z}{h}}\right) S = p_s S - p_s S e^{-\frac{z}{h}} = C_2 \left(1 - e^{-\frac{z}{h}}\right) \quad (2-24)$$

其中 $C_2 = p_s S$ ， S 为底面积，在此实验中为常数。需要考虑的还有外加压力作用在这一片层力的大小，由于横向的水平压力转换系数 K 的存在，实际作用在此处的压力小于外界的实际压力。

$$f_0 = f \cdot e^{-\frac{z}{h}} \quad (2-25)$$

所以此片层受到的压力总和为：

$$F = f_g + f_0 = C_2 + C_3 e^{-\frac{z}{h}} \quad (2-26)$$

其中 $C_3 = f - C_2$ ，将上式带入到电阻的表达式中，并从 $0 \sim H$ 积分，得到如下表达式：

$$R_{dz} = C_1 F^{-\frac{2}{3}} = C_1 (C_2 + C_3 e^{-\frac{z}{h}})^{-\frac{2}{3}} \cdot dz \quad (2-27)$$

$$R_H = \int_0^H R_{dz} = \int_0^H C_1 (C_2 + C_3 e^{-\frac{z}{h}})^{-\frac{2}{3}} \cdot dz \quad (2-28)$$

设 $t = e^{-\frac{z}{h}}$, $z = -h \ln t$, $dz = \frac{-h dt}{t}$, 上式可以改写为:

$$R_H = -C_1 h \int_1^{e^{\frac{H}{h}}} \frac{(C_2 + C_3 t)^{-\frac{2}{3}}}{t} \cdot dt \quad (2-29)$$

将上式带入各个变量后得到电阻随 t 的变化, 再带入关于 H 的表达式即可。带入表达式后得到变量值, 代入实验中具体数值, 竹炭颗粒堆平均密度为 400 kg/m^3 , 饱和深度约为 $0.234 \text{ m} \sim 0.468 \text{ m}$, 竹炭的平均电阻率为 10000 欧姆/m , 杨氏模量 10 GPa 。 $f=0$ 时, 利用 MATLAB 中的积分函数得到上式的数值积分结果如图 2-6 所示:

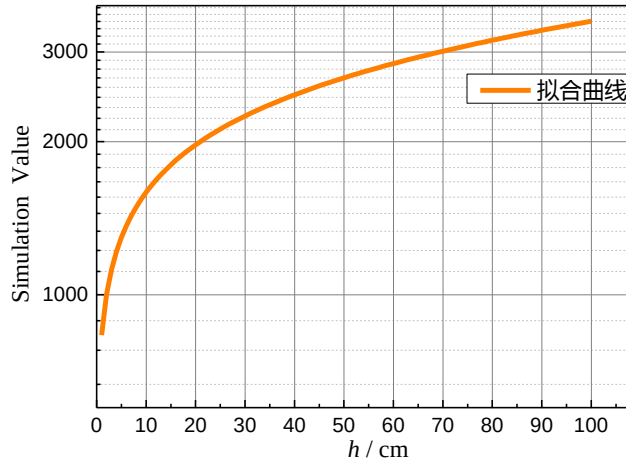


图 2-6 竹炭电阻颗粒电阻随厚度变化的规律数值积分的结果

由上图可以看出, 随着厚度的增加, 颗粒体系的电阻随着厚度的变化速度逐渐趋于缓和。与实验得出的结果具有相同的变化趋势。

这里需要说明以下几点, 首先通过先前分层电阻的实验我们可以发现上层的颗粒在受到压力时变化较大, 而下层的颗粒在压力作用下表现出的电阻值会出现饱和。其原因是上层颗粒感受到较大的压力, 而在粮仓效应的作用下, 侧壁摩擦力分担了上层颗粒重力的作用, 下层颗粒感受到的压力较小。

再加上下层颗粒已经受到了上层压力的作用, 再次加压时, 其电阻变化趋于饱和值。电阻随厚度的增加最终会趋于线性。我们可以认为在一定深度后电阻层的阻值趋向于饱和值, 那么继续增加厚度下层达到饱和深度的电阻层数也就越多。由于饱和电阻的阻值变化慌忙, 所以可以近似看成是常数, 从而随着厚度增加下部的饱和电阻就会线性增加, 从而电阻在厚度较大时趋向于线性增加。另外, 我们还可以将颗粒体系内部不同深度处片层的电阻率看成是随着江森模型变化的, 只要对

变化的电阻率在厚度方向上进行积分，得整个颗粒体系的电阻值。将积分上限改为厚度，即可得到随厚度变化的积分上限函数，颗粒体系电阻随厚度的变化关系。

2.4 本章小结

本章主要推导了颗粒体系在力作用下，基于赫兹接触理论的形变以及由此引起电阻变化的趋势。我们建立了如下的模型来解释实验现象。设颗粒中有厚度为 dz 的薄片电阻同时受到外界压力和上部的电阻颗粒重力作用的影响。但是需要考虑到颗粒物质在容器中的粮仓效应。我们将外力和内部颗粒物质的重力利用 e 指数衰减的形势归一化，得到了作用在薄片上的平均压力。若分为电阻薄层来考虑，从上到下的电阻层电阻大小是依次递减的，并且递减的速度逐渐减小，最后电阻层的电阻趋于一个常数，将各层电阻叠加后便得到随高度快速增加而后又趋近于线性增加的变化曲线。

第 3 章 颗粒体系内部电阻随压应力的响应关系

本章主要介绍了竹炭颗粒体系电阻在连续压力作用下电阻的响应特性研究。主要内容分为三个部分，分别是不同厚度颗粒的轴向（与应力作用方向相同）电阻随压应力的变化、不同厚度颗粒体系的横向（与应力垂直的方向上）电阻随压应力的变化关系以及同时分层测量颗粒体系内部轴向电阻随外界压力变化的关系。在实验数据的基础上总结和分析变化规律。

3.1 实验原理和实验装置

测量颗粒物质内部电学特性有很多参量，诸如电流、电压以及电阻等。考虑到电压和电流都受到电阻值得影响，并且测量电阻的方法比较成熟，我们选取了电阻这一值进行测量。利用欧姆定律测量颗粒物质内部电阻随外加压应力的响应情况。电阻量的变化可以反应出颗粒体系内部颗粒之间以及颗粒体系整体的变化情况。

在研究对象的选择上，我们比较了导电性良好的金属颗粒、导电性一般的竹炭和导电塑料颗粒、以及细砂颗粒。对于金属颗粒的导电性研究已有较多的报道，但是我们认为金属颗粒具有两个不适于本实验的特性。首先，金属颗粒的电阻值极小，导电性良好。金属在外界扰动作用下，变化过于剧烈，不利于数据的采集和整理，在受力较大的情况下尤其不易观察出电阻值得相对变化。其次，金属容易氧化并和其他物质相互作用，这使得金属表面很容易就会生成一层电阻很大的氧化膜，而且和电极接触的时候还会有微焊微接触等过程发生。维护金属颗粒实验材料工序繁杂，需要定期除去外层金属氧化层，实验时间也需要控制，这样会导致实验的重复性不佳。

土壤砂石颗粒虽然是一种很常见的材料，但是土壤颗粒的导电性也受到两个因素的影响。不同时期不同地理位置的土壤其含水量和矿物质含量不同，这会极大的影响土壤电阻的变化，土壤砂石电阻值的分布已经超出其在压力作用下的变化量，会对实验造成极大的误差。其次，土壤本身是一种多组分混合物，不仅含有无机盐和水、还含有大量的有机物和晶体微粒。其中盐分对于土壤的影响极大。盐溶于水即会形成导电性良好的电解质溶液，所以潮湿和干燥的微粒电阻值差别巨大，相较于温度控制实验室湿度比较困难。最后，土壤的电阻值比较大，需要电流生长很大变化时才能有明显变化，限于实验室加载最大只能达到 250N，实验结果不明显。所以我们同样排除了土壤作为实验颗粒。

对于竹炭颗粒，可以将其算成一种碳单质构成的材料，属于无机非金属材料范畴。竹炭一般有竹子在无氧密闭条件下加热而成，其内部疏松多孔，并且存在横

向和纵向的各项异性，但是作为整体测量统计平均后不影响实验结构。竹炭的特征电阻在 10^2 - 100^3 欧姆范围内，颗粒特征尺寸在厘米量级，并且不易氧化，并且常温下性质稳定。竹炭的模量在 10^9 量级强度足够应付压力的作用^[74]。另外竹炭在压力作用下电阻特性变化较为明显，能产生较为明显的相对变化。竹炭的导电性还会导走积累的电荷，不至于产生局部较强的静电积累。竹炭作为导体，在电路中可以看做是一个集中参数元器件（但其构成是分布参数器件），直接加载即可测量，所需要的分压电阻也比较常见易于实现。综上所述，在实验开始的部分我们利用竹炭作为研究对象来研究颗粒体系在压应力作用下的电阻变化情况。

但是不可忽视的是季节因素对于竹炭的测量结果有着较大的影响。我们于冬季开始试验，冬季虽然可以通过暖气空调控制室内温度，但是就试验室的密封条件无法控制湿度。冬季湿度相对较低，空气干燥。而夏季的时候多雨季节会造成试验环境湿度过高。而竹炭又是一种疏松多孔性材料，有较强的吸附性。所以湿度会对竹炭的导电性能造成较大的影响。另外竹炭容易在强压下断裂破碎，并且会产生较大的粉尘，碳粉会使得竹炭颗粒之间的接触情况变得复杂，影响实验结果。考虑到这些因素之后我们寻找到了有机材料和炭黑掺杂制作形成的导电塑料来作为我们的实验对象。

我们选择的导电塑料是以 PP 为基质炭黑为辅料的复合材料，导电性一般在 10^3 - 10^4 之间，颗粒特征尺寸一般在几个毫米大小。导电塑料颗粒粒度较小还有一个优点，能在容器中分布更为均匀。竹炭由于粒度较大，若某些地方不平整在加压实验的时候容易产生断裂和破碎造成电阻突变和颗粒损失。其次，导电塑料不会吸收空气中的水蒸气，在实验过程中也不会有粉尘产生，于是平均直径得到控制，并且微粒不会参与到实验过程中来，影响实验。



图 3-1 导电塑料颗粒（左）和竹炭颗粒（右）

我们主要的实验原理是利用闭合电路欧姆定律通过分压电阻上的电压变化间接测得颗粒体系两端的电压差及其变化，从而根据欧姆定律得到竹炭两端的电阻值及其变化。其中电源采用恒压式的稳压电源，而信号采集利用的是 YE-7600 型的信号采集器，连接电脑进行测量。其内阻为 10^5 - 10^6 量级，可以忽略分流的影响。电路中的分压电阻为定值电阻，经过测算和理论推导，其阻值与测量对象相同时，测量两端分压电压产生的相对变化最大。利用两端的电压和电阻就可以提供电路的电流，从而计算出颗粒体系的电阻。（加推导）实验原理基于闭合电路的欧姆定律：数据采集器的两个电压探头测量定值电阻两端的电压变化，根据欧姆定律电流大小为：

$$I = \frac{v}{r} \quad (3-1)$$

其中 r 为分压电阻 (Ω); v 为分压电阻电压(V)。串联电路中电流相等，此电流即为颗粒中流过的电流。考虑到竹炭的特征电阻以及传感器的灵敏度，我们设定稳压电源输出电压 U 为 6 伏特，颗粒体系两端测量得到的电压为：

$$V = U - v \quad (3-2)$$

其中 U 是电源输出电压(V); V 为颗粒体系两侧分得的电压(V)。从闭合电路欧姆定律出发，计算出串联电路中的电流，电源电压减去定值电阻的分压后得到颗粒体系的电阻，

$$R = \frac{V}{I} = \frac{U - v}{\frac{v}{r}} = r \left(\frac{U}{v} - 1 \right) \quad (3-3)$$

上式 R 为测量得到的颗粒体系的阻值(Ω);

我们设定稳压电源的输出电压 U 为 6.0V，在测量竹炭颗粒时，选取的分压电阻 R_0 为 100Ω ，所以颗粒体系的电阻大小为（同样在测量导电塑料时选取定值电阻为 1000Ω 与其相同数量级）：

$$R = \frac{600}{v} - 100\Omega \quad (3-4)$$

上式即颗粒体系的电阻值。试验测量出电压随外力变化的数据，利用 matlab 或 Origin 进行处理，结合是采集到的压力和电阻数据，即可以得到颗粒体系得到电阻值随外界应力的响应特性。

我们采用的实验装置主要有三部分构成。首先是颗粒体系及其容器。我们选择的是高度为 600mm，直径为 144mm 的医用标本玻璃桶作为容器，原因是这种标本桶方便易得，玻璃材质内部光滑。同时标本桶还具有一定的强度，能承受试验中的压力（200~300N）并且压力作用下形变较小刚度好。

其次是应力加载系统。我们使用的是滑轮吊装系统和颗粒流导引管，将升至高处（2m）的铁砂通过限流孔均匀的流到颗粒体系的顶部进行压力加载。利用铁砂的原因有两个，第一铁砂密度大，相同的压力作用需要的铁砂较少；其二颗粒流在流经孔洞时流速只决定于颗粒的尺寸和表面材质以及孔洞的尺寸，与颗粒的高度多少无关，所以能保证匀速加载。

最后是数据采集系统。数据采集系统由三个子系统构成，其一是电路系统，由接入电路的颗粒体系、分压定值电阻、以及稳压电源组成；其二是传感测量系统，由充当电压表的数据采集器探头以及测量压力的电桥压力传感器、数据采集模块构成；其三是分析处理系统，由数据采集卡的计算机图形用户界面和数据处理软件 Origin 构成。将采集到的数据保存在计算机硬盘上，并将其转换成 ASCII 码的形式，最后利用 Origin 软件进行压力拟合和插值，并通过电压值计算电阻值，随后做出电阻随压力的变化曲线。

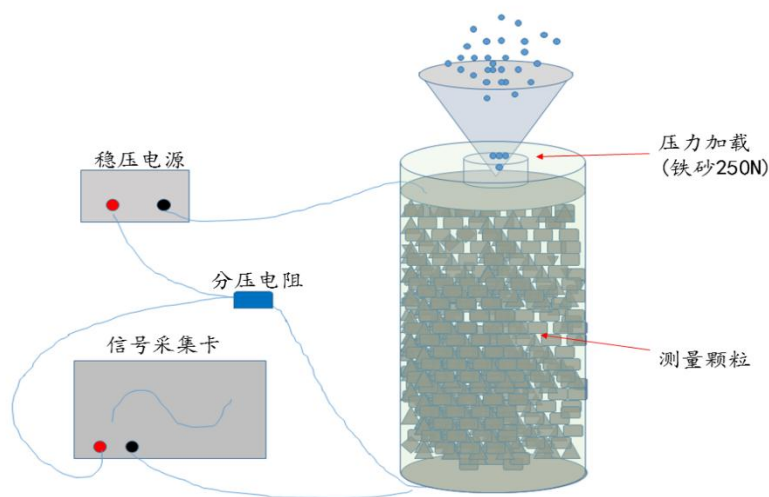


图 3-2 实验装置简图

通过本实验系统可以完成从 0.4N—250N 范围内力的加载（由于上电极自身重力的影响，初始压力不为零），虽然后期加载用的铁砂有损失，但是仍然可以跨越三个数量级(10^{-1} - 10^2)，满足测量范围的要求。实验发现在压力加载作用下，不同厚度的颗粒变化情况有些许差别，而且颗粒物质内部不同深度处变化也不尽相同。这为探究非金属颗粒内部结构提供了一定的线索和依据。在每次实验过后，我们都会将颗粒倒出，在依照同样的规则重新放入容器内，以消除应力加载后的影响。个厚度的颗粒随压应力变化的响应测量十次，取平均后得到结果。

实验中，为了明确温度对于实验的影响，每次实验前都利用干湿球温度计计量温度和湿度的大小。每次实验前还需将测量的传感器和稳压电源调零，以规避系统

误差。最后，每次开机测量前需要预热电源和传感器系统，以保证工作在最佳状态。

在考察了颗粒体系内部颗粒运动的特征速度（低频蠕变、重构等），综合每次实验采样所需要的时间（~1200s）以及实验要求的精度后，我们将实验的采样率定位 10Hz，这样基本可以覆盖实验中电阻突变的现象，同时兼顾了采样数据的存储空间问题。

3.2 颗粒体系轴向电阻随压应力的响应关系

由于颗粒体系是一个非均匀的各项异性系统，并且其内部应力变化和电阻变化是非线性的，于是我们从不同的角度探索了颗粒体系内部的电阻随压应力的响应关系。首先我们将测量在连续压力作用下颗粒体系的轴向（与压力方向平行同方向）电阻随压应力的响应关系。

在实验容器内部的底面和颗粒的顶部分别放置薄贴片作为测量电极，利用导线与电路相连。铁电极片尽量薄但是需要有一定的强度来承受上部铁砂加载的压力，并且不易形变。在所以铁电极片同时起到了支撑的压力传递作用以及探测作用。需要注意的是，每次使用前需要用砂纸打磨以减小表面氧化膜的影响，同时在使用过后，需要擦拭电极表面，防止其他物质粘附在表面腐蚀电极。

3.2.1 竹碳颗粒堆的电阻随压应力的响应特性

本节测量了颗粒堆的轴向电阻在压应力作用下的响应情况。先将颗粒体系的高度设定为 480mm（在标本瓶的内径范围内，此数值便于用二分法处理），直径为 144mm（玻璃标本瓶内径）。填充竹炭颗粒，连续下落的铁砂提供连续加载的压应力。实验得到了如下图所示的颗粒体系电阻随压应力的变化曲线。

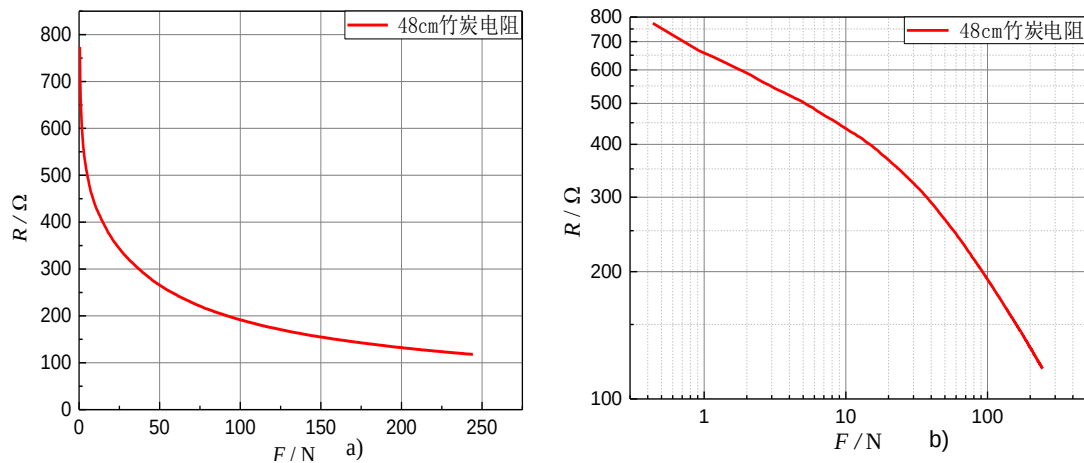


图 3-3 厚度为 48cm 的竹炭颗粒在正向压应力的作用下纵向电阻的响应情况。图 a 为直角坐标，图 b 为 log10 对数坐标。其中容器的为 144mm 直径的厚壁玻璃桶，加压采用铁砂准静态匀速加压（~0.2N/s）。图中曲线为 10 次测量结果的平均值。

为了便于观察，图中附加了对数坐标下的情况。可以看到上图中电阻随压力的增加成指数衰减，并且在受力初期变化较为明显。在右中存在明显的双对数变化规律，这说明在受力过程中颗粒体系内部电阻对的压力响应遵循不同的变化规律。这是我们发现的一个重要特征。

根据已有的研究成果，颗粒体系内部的变化一般是呈现对数变化规律的，而我们的这个颗粒体系则呈现的是双对数的变化规律。这意味着在受力较小时颗粒体系内部存在一个变化较快的过程，而在受力较大的时候则存在另一个过程。类似于固体在加压时产生的‘相变’过程。

从赫兹定律推导出颗粒体系内部电阻值大小和压应力的响应关系具有 $R \sim F^{-2/3}$ ，在对数坐标中呈现出一条斜线的变化规律。但是实验中测定的曲线双重斜率（双对数变化规律），说明在里较小的时候，还存在一些级数较低的项需要考虑到应力加载的过程中，可以写为多项式和的形式：

$$R = A_1 F^{-2/3} + A_2 F^{-1/3} \quad (3-5)$$

在力较小时第二项起主要作用，在力较大时第一项起主要作用。于是便会产生双对数的变化情况。在理论探索和拟合的过程中将会用到多项式来进行解释。

图中在小于 10N 之前电阻随压力变化比较迅速，随后逐渐减缓，变化在 50N 以后趋于另一个较为平缓的对数，形成了两种截然不同的变化规律。在压力较小时，变化的较为迅速，而在大于 50N 以后则表现出一个较为平缓的变化。这里需要注意的是在对数坐标中后半段的变化斜率看似比前段陡，但是我们要注意到很坐标的变化同样也是对数增加的，考虑到这一因素，我们可以得出前陡后缓的结论。

这与我们在连续体力学中发现的规律有着很大的不同。在连续体力学中，两个导电物体之间的接触电阻会随着压力的增加呈现简单的一致的规律变化。在颗粒体系中，由于颗粒体系的内部相互作用和器壁力的影响，随着外力变化而变化的电阻不在是遵循简单的接触电阻的变化，而是将颗粒体系内部的相互作用和外界的影响通过更加复杂的规律表现出来。

3.2.2 导电塑料颗粒堆的电阻随压应力的响应特性

在测量了竹炭颗粒的导电特性之后，我们为了验证这种特性在颗粒体系内部的普遍性，于是我们利用导电塑料颗粒作为研究对象进行的测量。导电塑料与竹炭的区别主要由以下三个方面，导电塑料的材质较软，模量较小；其次导电塑料的特征电阻比竹炭大，竹炭的特征电阻大约为 1000 欧姆，而导电塑料的特征电阻大约在 7000-10000 欧姆之间；最后由于试验用的导电塑料是 PP 母粒。尺寸较小，呈圆柱形，特征尺寸 3-5 毫米。所以导电塑料的堆积会比竹炭更为紧密。

考虑到竹炭颗粒和 PP 导电塑料颗粒的所堆积的层数问题,对于尺寸较小的 PP 颗粒我们采用了 120mm 厚度测量,一边和竹炭颗粒进行比较。

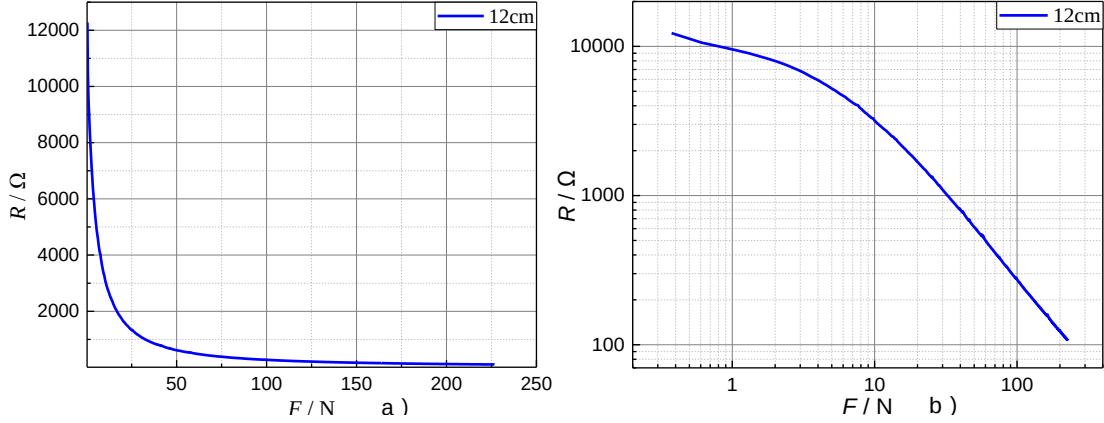


图 3-4 PP 导电塑料中电阻随压力的响应关系。其中 a)为直角坐标系, b)为对数坐标系。

从上图中我们可以看到 PP 颗粒电阻随压力的响应特性与竹炭颗粒的响应特性相似,都会有相似的双对数变化情况。这说明导电塑料的电阻随压力的响应特性是普遍存在于颗粒体系中的,同时我们可以看到,较软的导电塑料在相同压力下接触面积变化较大,所以电阻值的相对变化会更为剧烈。

在压力作用下颗粒体系电阻的变化主要来源于颗粒间接触面积的变化,由电阻定律我们可以知道,电阻与接触面积成反比,接触面积的变化导致的接触电阻的变化,从而引起整个颗粒体系电阻的变化。

$$R = \rho_0 \frac{l}{S} \quad (3-6)$$

其中, R 为接触电阻, S 为与应力相关的接触面积。在工程上刚性球和无限大的弹性平面接触时,接触面积和所受压力有如下的作用关系:

$$S = \pi \left(\frac{3FR}{4E^2} \right)^{2/3} \quad (3-7)$$

其中 R 是刚性球的半径, F 是两个物体间的相互作用力, E 为弹性模量。将上式带入到电阻定律的公式中我们得到颗粒体系的电阻随外加压力的变化关系为:

$$R = \rho_0 \frac{l}{S} = \rho_0 \frac{l}{\pi \left(\frac{3FR}{4E^2} \right)^{2/3}} \sim F^{-\frac{2}{3}} \quad (3-8)$$

由上式可以得出电阻随外界压力呈幂律规律变化。

由于在直角坐标系中电阻的变化曲线与幂函数比较类似,我们先采用幂函数来拟合上述实验曲线。

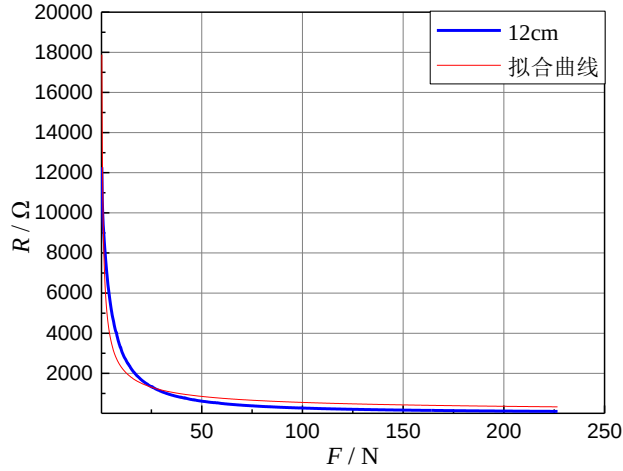


图 3-5 导电塑料在压力作用下电阻的变化的拟合情况

拟合结果如上图所示,利用基本幂函数拟合:

$$R = aF^{-b} \quad (3-9)$$

得到的指数 $b=0.62224 \sim 2/3$, 接近理论中的 $2/3$, 其标准差为 0.005647, 也在误差允许的范围内。说明我们的理论分析是可行的。为了进一步验证这样的实验规律, 我们将上图转化到了对数坐标下进行分析, 从图中可以看到拟合曲线在初始和末了时与实验曲线偏离较大, 根据连续体力学的赫兹接触理论得到的拟合曲线与实验曲线存在较大的差异。

我们发现在线性坐标系内拟合程度较高的曲线在对数坐标系中拟合精度很低。其原因源于两点:

- (1). 首先, 在初始时刻附近, 作用在颗粒体系上的力较小, 很多接触不良的颗粒间开始产生连接, 增加了颗粒体系中的通路, 使得颗粒体系的电阻在初始时刻下降较为剧烈;
- (2). 其次, 在加载过程的末期压力作用较大, 颗粒体系内部的空间已经得到了足够的调整, 电阻值逐渐趋近于饱和, 随着压力的增加, 使得纵向上电阻一次饱和逐渐向下传递, 变化趋势会趋近于线性。

通过这样的分析判断后我们决定对曲线进行分段处理, 观察图 3-6 的曲线我们可以发现在初始到 5N 附近的曲线和在大于 10N 部分的区域在双对数坐标下基本是直线, 我们就以这两部分分开拟合实验曲线, 实验曲线分为两段拟合会得到良好的效果, 拟合公式为:

$$\begin{aligned} R &= a_1 F^{-b_1} \\ R &= a_2 F^{-b_2} \end{aligned} \quad (3-10)$$

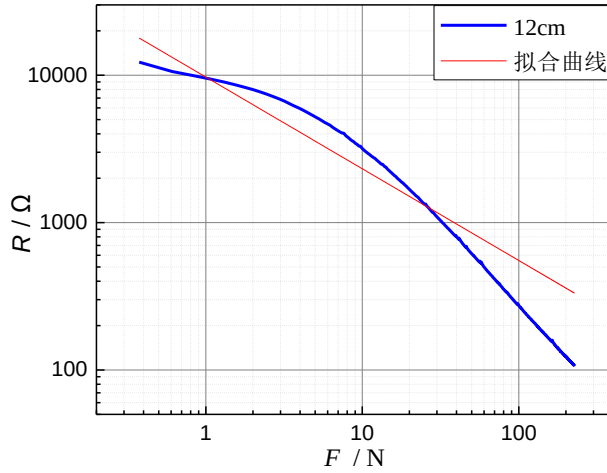


图 3-6 对数坐标下颗粒体系电阻随压力的变化情况

经过计算我们得到如下图所示的拟合结果，图中两条直线分别是分段拟合函数。

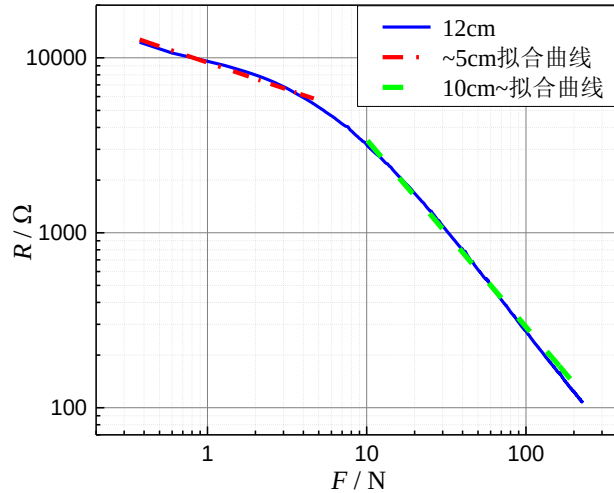


图 3-7 分段拟合颗粒体系电阻随压力变化曲线

图 3-7 中可以看出分段拟合的效果非常好，拟合曲线在在所属区间段内几乎和试验曲线重合。这与我们的理论猜想相一致。在初始时刻的变化趋势和在尾端变化不同。表 3-1 为两端曲线的指数值和标准差。

表 3-1 导电塑料颗粒体系纵向电阻分段拟合指数及标准偏差

Part	b	Sigma
Part1	0.308	0.011
Part2	1.070	0.001
All	0.622	0.005

从表 3-1 中我们可以看出其中指数的值与理论预测十分接近。首先,理论上颗粒间的接触电阻与接触面积有关,在压力的作用下接触面积与压力的 $F^{2/3}$ 成正比,我们得到的实验值为 0.622,十分接近于 $2/3$ 。其次,在分段拟合的过程中我们发现初始和末了时刻的部分都遵循各自的指数变化规律,在初始时刻指数为 0.308 接近于 $1/3$,而在末了时刻指数又接近于 1.这说明初始时刻的变化主要来源于不良接触到接触以及接触点数量的增加,而末了较大力作用时,颗粒体系的电阻变化趋于线性变化,此时颗粒体系整体趋于弹性介质被压缩,整体电阻线性减小。

此处需要说明的是实验中的温湿度控制。首先对于温度,实验主要在冬季进行,室内的暖气和窗子的散热达到热平衡后室内温度几乎维持恒温,所以通过温度计检测的温度几乎一致,保证了温度;其次冬季空气湿度较小,维持在较为稳定的较低水平,所以湿度也在尽可能的范围内得到保证。但是冬季干燥,需要用外界地线导走积累的静电荷,避免影响实验。同时,实验用的信号采集卡电压位数精确到小数点后 4 位,考虑到数据的有效性我们取拟合系数小数点后三位。

3.3 颗粒体系横向电阻随压应力的响应关系

在研究了颗粒体系纵向电阻随外界压压力的变化关系之后(纵向电阻是指测量电阻的电极及其产生的电场方向与外力作用相同),我们同样考虑了竹炭颗粒体系横向电阻随外界作用力的变化情况(测量电场方向与力的作用方向垂直)。颗粒体系内存在一个十分重要的效应——粮仓效应,就同横向作用有紧密联系。

由于颗粒体系内部具有强烈的相互作用,并且具有横向的剪切作用,所以颗粒体系能够将从上方传递下来的压力通过摩擦力等内部作用转换成水平方向的作用力,随后通过与侧壁的摩擦作用抵消掉一部分竖直方向上重力和压力,这就在颗粒体系中产生了饱和效应。我们通过这个实验探寻横向电阻与压力间的对应关系。观察横向电阻随压力的变化情况—纵向电阻的联系和区别,并找到相应的实验规律加以总结。

3.3.1 竹炭颗粒堆的横向电阻随压应力的响应特性

在测量竹炭颗粒的横向电阻时我们采用了条状金属电极插入圆柱形的颗粒体系两侧对称位置,电路连接与测量纵向电阻时相同,稳压电源电压保持 6V 不变,分压电阻的阻值也没有改变。同样每条曲线为十次测量的平均值。为了和纵向电阻的情况相对应,我们同样选取了 483mm 厚度的竹炭进行测量,测量结果如下图所示。

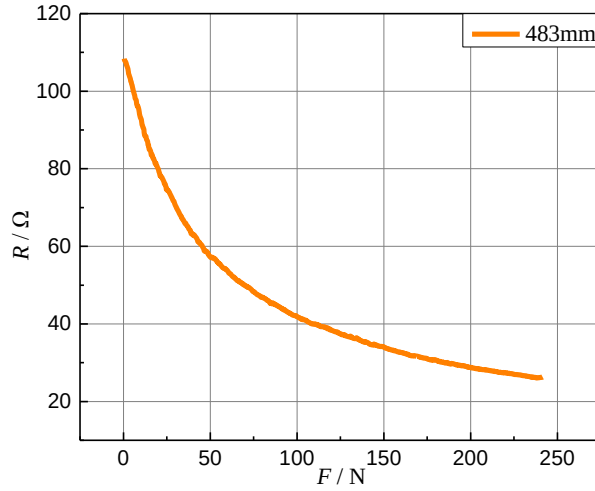


图 3-8 竹炭颗粒横向电阻在压力作用下的变化情况，其中竹炭颗粒的厚度为 483mm。

可以看到随着压力的变化，颗粒体系的导电性在逐渐增强，电阻依然随着压力的增加而逐渐减小，并且在线性坐标系下能看到类似于幂函数的变化情况。值得注意的是，颗粒体系的横向电阻变化纵向电阻有两个明显的不同之处：

- (1). 首先横向电阻曲线的变化不如纵向电阻变化剧烈，相对变化为初始值的 $1/3$ ；
- (2). 其次，横向电阻绝对值大小大大小于纵向电阻阻值。

这两个现象来源于颗粒体系测量时内部颗粒的并联测量方式。在测量横向电阻时使用的是条状金属电极，从顶部沿着侧壁直接插入到底部，接触到从上到下每一部分的侧壁颗粒，在通过侧壁颗粒导通到内部的颗粒，相当于和不同层的电阻并联。所以横向电阻的绝对值就小于纵向电阻；其次，加压的方向实在纵向，横向受到的压力主要来源于颗粒体系内部压力转换系数传递到横向上。横向的排布相对于纵向紧密，由于压力转换系数小于 1 再加上颗粒体系并联的电阻值较小，所以横向电阻变化较纵向和缓。

3.3.2 竹炭颗粒堆的横向电阻随压应力的响应特性分析拟合

观察竹炭颗粒横向电阻随压力的变化关系，可以发现在直角坐标系内呈现出与指数函数类似的变化规律。所以我们再次利用幂函数对其进行拟合：

$$R = aF^{-b} \quad (3-11)$$

得到的指数 $b=0.27621774$ 为 $1/3$ ，其标准差为 0.00313335，也在误差允许的范围。得到的结果如下图所示，图中实线是横向电阻随压力变化的实验曲线，而虚线则是用单个指数拟合的曲线。我们可以明显的看出，即使在直角坐标系中，符合的也不好，两条曲线的差距很大。拟合曲线的前半部分比实验值偏小且变化较快，而后半部分比实验室偏大变化较慢。

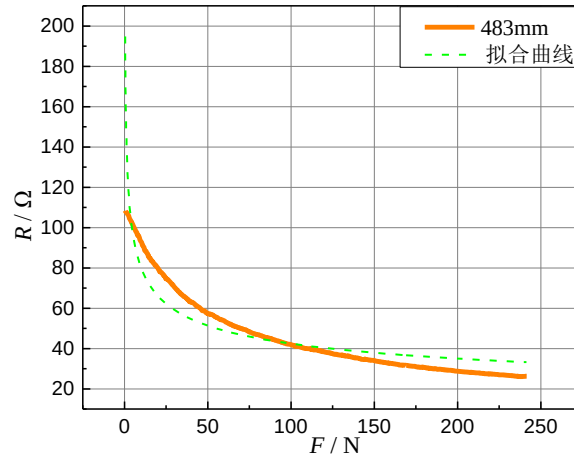


图 3-9 颗粒体系横向电阻的指数拟合曲线

为了看出竹炭颗粒在压力作用下呈现出什么样的变化趋势，我们在双对数坐标下重新画出上图，这时我们可以发现明显的变化趋势。竹炭颗粒体也呈现出双对数的变化趋势，我们可以看到在 5N 前 20N 后图像近似成直线。

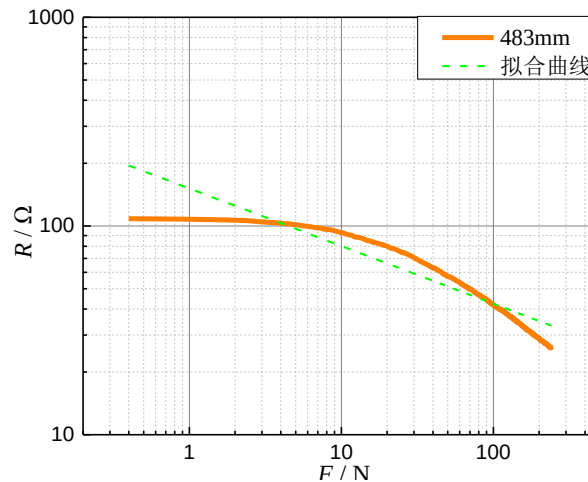


图 3-10 厚度为 483mm 的竹炭颗粒横向电阻随压力增加而减小的变化情况，双对数坐标下可以明显看出两段 power-law 形式的衰减，第一段在 5N 以前，第二段在 30N 以后。

从上图中可以看出，竹炭颗粒体系横向电阻随外力变化依然满足与纵向电阻相同的变化关系，即两段指数形式的变化。随着外界作用力的增加横向电阻先以很快的速度减小，即图中的指数一段，随后又以较慢的速度一直衰减，图中的指数二段，直到对外呈现出饱和。

这个过程和纵向电阻的变化规律一致，说明竹炭电阻的变化规律不依赖于外力作用的方向，是一种颗粒体系内部存在的特殊相互作用。将其中分两段来进行指数拟合，5N 之前为第一段 30N 以后为下段，中间为过渡段。拟合公式和结果

如图 3-11 所示: $R_1 = a_1 F^{-b_1}$, $R_2 = a_2 F^{-b_2}$

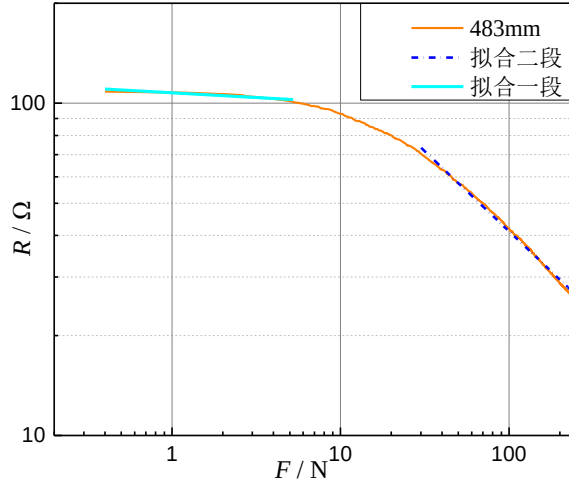


图 3-11 分段拟合得到的拟合曲线

从图中可以看出横向电阻的变化也同样可以用双对数拟合出来, 其中第一段的指数位置 $b=0.028$, 标准差为 0.003; 第二段指数位置为 $b=0.482$, 标准差为 0.001。

表 3-2 导电塑料颗粒体系横向电阻分段拟合指数与纵向电阻拟合值比较

Part	b 横向电阻	b 纵向电阻
Part1	0.028	0.308
Part2	0.482	1.070
All	0.276	0.622

我们发现两端的拟合指数显著小于纵向电阻两端的拟合值。将上面的值与横向电阻比较后可以发现, 横向电阻的指数值显著小于纵向电阻的指数值。其原因有二:

- (1). 首先, 颗粒体系在横向受到的作用力远小于纵向, 纵向的压力需要通过压力转换系数 K (一般为 0.3, 即 $1/3$) 才能作用的横向的颗粒之间。
- (2). 其次, 横向电阻测量的是所有电阻层的并联效应, 任意一部分电阻的变化会被所有的电阻平均分担, 所以变化会比较平缓。

3.3.3 比较颗粒堆的横向与纵向电阻随压应力的响应特性

随后我们还对比了横向和纵向颗粒的变化关系, 在同一张坐标图内画出了两套变化曲线, 如下图所示。从中可以直观地比较出各个曲线的变化。

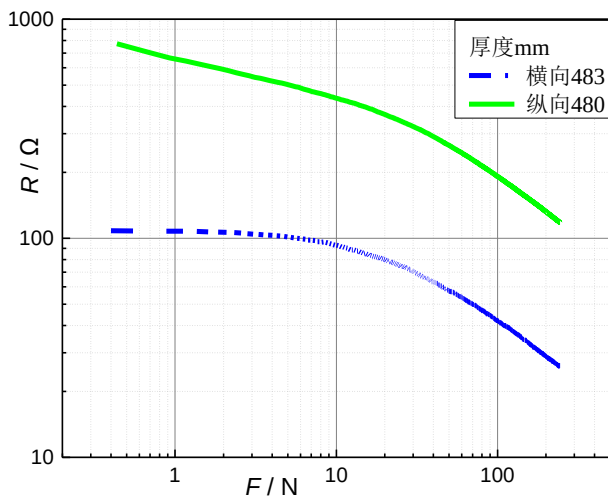


图 3-12 压力作用下电阻响应曲线，实线为纵向电阻点划线为纵向电阻。

从上图中我们可以看出竹炭颗粒体系中横向和纵向颗粒电阻在外力作用下的对比。纵向电阻的变化比横向电阻的更为剧烈。这是由于电阻在力的作用方向上变化更为强烈，而对于横向，这里力的作用则是来自颗粒体系内部摩擦力和侧壁摩擦力以及支撑力作用下产生的变化。这里需要注意的是，这张图很明显的表示出了横向作用是由纵向的力经由摩擦力转换为水平方向的力造成的。这可以由下面这张示意图表示出来。

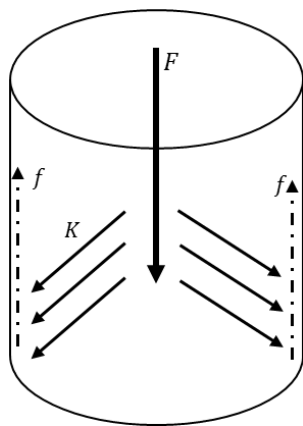


图 3-13 侧壁摩擦力示意图

侧壁不是绝对光滑的，总会对其接触的颗粒产生一定的摩擦力，而摩擦力的方向只能与接触面平行，所以得到的是向上的摩擦力。当颗粒受到纵向的压缩时，会向横向膨胀一，对侧壁产生更大的压力，从而得到更大的摩擦力来平衡压力的作用。由于颗粒内部相互作用和摩擦力的存在，使得外部加载的压力通过摩擦力被侧壁吸收，这部分解释了颗粒电阻的变化规律。侧壁摩擦力以及颗粒物质内部的相互作用在其中起着非常重要的作用。正是由于这些力的存在，才使得颗

粒体系内部有了不同于连续体物质一样的受力均匀，其中产生力链和力网的结构。

正是由于这样横向支持力的存在提供了向上的摩擦力，容器壁承担了一部分压力和上部颗粒的作用，才使得颗粒物质的重力被容器壁吸收，容器底部的压强随着容器内部颗粒体系厚度增加不再继续增加，出现江森模型描述下的粮仓效应，即粮仓底部的压强随着粮仓的增高趋向于某一饱和值。

3.4 本章小结

本章主要介绍颗粒体系内部电阻值随压应力的响应关系。实验测量了不同厚度颗粒在受到连续加载的压应力作用时内部的电阻响应情况，分别测量了沿压力加载的轴向，垂直于压力作用方向的水平方向上颗粒体系的电阻随连续压力加载的变化情况。为了证明这种效应存在的普遍性，我们还利用相同装置测量了导电塑料颗粒内部的电阻随压力的响应关系。通过分析和拟合，得到了颗粒体系电阻随压力按幂律变化的拟合曲线。通过观察试验曲线，在对数坐标下分析我们发现颗粒体系电阻随压力的响应特性符合一种双对数的变化规律。为了获得更为准确的结果，我们将曲线分为了两段来拟合，得到了与试验曲线几乎重合的结果，并且拟合指数在数值上很好地满足了基于接触形变理论得到的结果，即电阻的变化正比于 $F^{-2/3}$ ，实验数据，拟合数据与理论符合较好。

第 4 章 颗粒物质准静态电阻随压力的响应关系

在本章为了验证颗粒物质内部的电阻随压力加载的响应特性是否广泛存在于颗粒体系内部，我们探索了竹炭颗粒内部在分层情况下电阻的变化情况，从中发现了内部电阻不均匀变化，这启发了我们研究颗粒体系电阻随厚度的变化情况。我们利用特征电阻稍大的聚丙烯(Polypropylene, PP)导电塑料颗粒来作为研究对象进行验证。由于 PP 导电塑料颗粒特征尺寸较小，在实验厚度很小时仍可构成多层，所以利用 PP 导电塑料颗粒测量不同厚度的静态电阻。随后利用导电塑料颗粒探索了颗粒体系内部准静态无加载的情况下整体电阻随厚度的变化关系，以研究厚度或者高度增加时颗粒体系内部受力情况的改变。

4.1 分层测量颗粒体系的轴向电阻随压力的变化关系

从上面的结果可以知道颗粒体系内部的电阻值无论是在轴向还是横向上都是非均匀变化的。顺着这个结论，我们自然想到了颗粒体系内部的电阻值在厚度方向上是否是均匀分布的，会不会在受力较大的地方电阻值变化比其他地方强烈。

因为颗粒物质在柱状容器内存在压力饱和的粮仓效应，于是我们认为加压的情况可以等效为在原来高度上增加相同重量的相同颗粒物质来作为加载，但是只考虑原高度部分的电阻。那么由于容器底部存在压力饱和效应，随后加载的压力自然会被侧壁和顶部吸收，原颗粒物质顶部收到的压力会较大，而底部的压力饱和后便趋向于不变。于是我们在高度方向上分层测量的颗粒体系的轴向电阻随外界压应力的响应关系。

4.1.1 双层颗粒堆的轴向电阻随压应力的响应特性

我们将 480mm 的颗粒堆分为厚度相同的两部分，在中间插入了第三个相同的铁片电极，将其置入玻璃标本瓶内，两部分电阻为串联关系。除了压力信号采集外，我们还需要两个探头来采集信号，分别得到两部分颗粒的电压值变化，可以以此计算出两层颗粒各自的电阻值以及整体的电阻值。为了观察中间插入铁片电极的影响，我们还研究了插入内部电极前后颗粒体系电阻值的变化情况。

我们首先将 480mm 的竹炭颗粒分成了各为 240mm 厚度的竹炭。在中部 240mm 处插入了铁片电极，每一个电极都接入数据采集器探头，打开压力加载的铁砂，并开始记录数据。我们同时测量了上下层电阻以及颗粒体系的整体电阻随压力的变化。下图是双层颗粒同时测量得到的数据曲线，并且图中还将颗粒体系整体的电阻变化也显示了出来便于比较。

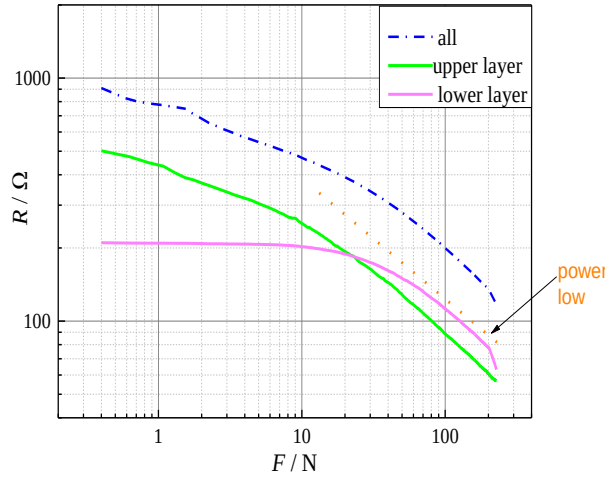


图 4-1 双层测量时竹炭颗粒体系电阻随压应力的变化关系。其中绿色线是上层颗粒的变化情况、粉红色线是下层颗粒的变化情况，蓝色虚线是颗粒体系整体的变化情况。每条曲线来自于十次测量平均的结果。

从上图可以明显的看出上下两层的差异性。绿色线较为敏感，变化也较为剧烈。粉红色线变化比较迟缓，直到较大力时才开始有明显变化。相同的厚度，相同的力加载，但是有着截然不同的变化情况。

其中最明显的是下层颗粒有明显的延迟。上层颗粒的电阻随着力的增加随即开始减小，而下层颗粒的电阻需要力增加到一定程度后才能开始有明显的变化。

我们可以得到相同的结论，颗粒体系上层受到的力较大而且较为敏感，而下层受到的力已经被上层的颗粒削弱。其次，我们从整体变化曲线可以看出，颗粒体系电阻变化的双对数规律主要由上下层共同作用引起，上层贡献曲线变化较为剧烈的部分，而上下层叠加在一起贡献了曲线后部变化较为平缓的一部分。曲线上有一些弧度翘起可能是来源于实验中或是数据处理过程中的误差引起的。值得注意的是，在起始时下层颗粒的电阻远小于上层电阻，原因是上层的颗粒通过重力向下层传递压力，所以下层颗粒起始电阻较小。

为了分析颗粒体系加入的电极片是否对颗粒体系的电阻值测量有较大影响，例如电极的加入可能会增加体系的插入电阻；同时电极的加入会破坏原有的结构，影响体系内部原来存在的压力饱和效应。同时，电极与碳颗粒接触电阻变化规律不同。我们比较了其中双层测量时颗粒体系的总电阻和相同厚度单层测量时的电阻。

从图 4-2 中可以看出双层测量方式和单层测量方式的电阻值差别不大，特别在较大力作用下两者变化趋于一致。在初始时刻的差别主要来自于插入内部的电阻与颗粒间的接触以及对侧壁摩擦力的影响。下图是内部上层颗粒和下层颗粒与单层相同厚度颗粒体系电阻的比较，下部较为弯曲的曲线为下层电阻。

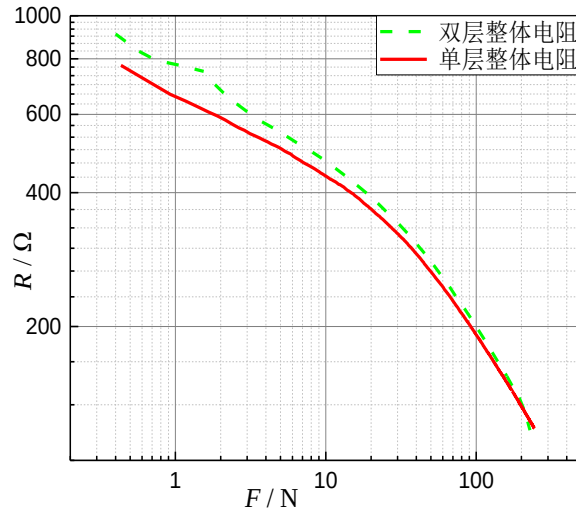


图 4-2 双层测量和单层测量总电阻的比较

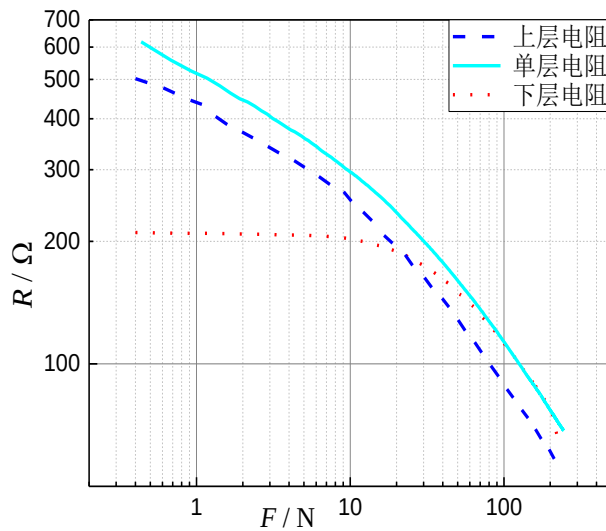


图 4-3 分层测量上下层颗粒电阻与单层测量方式的比较

从图 4-3 中可以看出，单层测量时上层颗粒的电阻与双层测量时趋势相同，期间相差一个常数项可呢过来自于颗粒体系与电极的接触。下层电阻较小源于上层颗粒加载的初始重量。

由此我们可以得出的结论是：电阻分层测量方式不会对结果造成较大影响。我们还将将在三层颗粒中予以验证。

4.1.2 三层颗粒堆的轴向电阻随压应力的响应特性

从上面的实验中我们已经可以明显看到在厚度方向受力不均匀，其中在顶部的颗粒收到的支撑力较大电阻变化较大，而在底部的颗粒收到的压力较小电阻变

化较小。于是我们在此基础上继续加多层数，以此来观察在层数增加时的颗粒体系内部电阻在压应力作用下随深度的变化规律。

我们将 480mm 的颗粒分为三层，在其中内部插入了两片相同的测量电极，分别位于 160mm 和 320mm 处，并连接至数据采集卡上。测量数据为压力加载下每层颗粒分压的大小及其变化。

在十次测量之后平均处理数据结果，将每一层电阻的大小及其随外界压应力的变化表示在了下图中，并且还将整体的变化曲线表述了出来。图 4-4 中从上到下依次是整体、上层，中间层，底层颗粒随外力的变化情况。其中红色粗实线是 48cm 颗粒整体电阻随压力的变化趋势，深蓝色实线是三层中最上层的电阻变化曲线，淡蓝色划线是中间层，黄色点线是最下层。

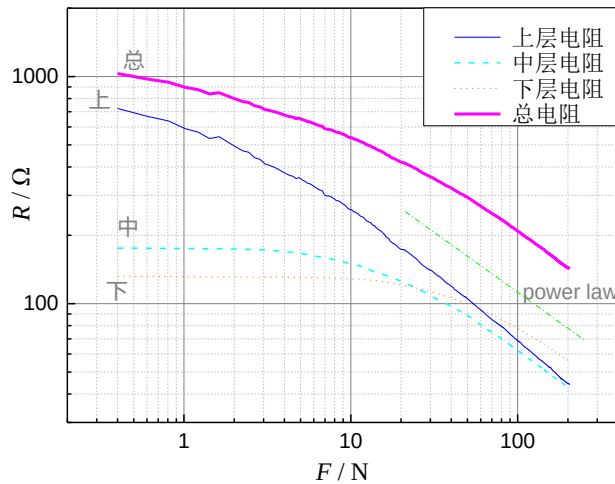


图 4-4 颗粒体系分三层测量时，三层颗粒各自的电阻以及总电阻随压力的相应情况。

实验结果需要解释两点。虽然每一层碳的厚度是一样的而且加压过程也一样，但是初始电阻却不一样，中层的比上层小，下层的比中层小，这是由于在初始时刻，中层的颗粒需要承受上层颗粒颗粒的压力，而下层电阻需要同时承受高层和中层的压力，受压的情况下颗粒体系的电阻值是会变小的，所以下层的电阻是最小的，中层次小，上层是最小的电阻值。其二，我们可也看到三条曲线在末端都趋向于平行，这主要是由于竹炭在受到外力作用下时变化规律都一致，而且在外界压应力较大时，三层所受到的压力也可以近似认为是相等的。上层和中层的电阻曲线会向下穿过下层的电阻曲线，其中一个原因就是因为在压应力加载时，下层收到的力被中、上层所承担，直到压力达到一定大小时才会“感应到”顶部加载的压力，使得电阻产生变化。

1. 三层测量的结果我们可以更为清晰地看到竹炭颗粒内部受力结构的分布。上多下少，上强下弱。由于电阻的变化直接反应了接触力的变化，所以通过观察电阻

的变化可以得到力变化的趋势。

2. 上层颗粒最先开始和外力产生相互作用，并在开始的时候贡献了大部分的电阻变化。随着力的增加，中层颗粒和下层颗粒开始有了变化；
3. 力足够大的情况下，中下层颗粒和上层颗粒电阻的规律趋于一致；
4. 力从上向下的传递存在延迟，会被每一层的颗粒衰减削弱。

三层测量的结果给我们展示出颗粒体系力连结构分布的非均匀性。我们认为虽然电极很轻薄，但是加入到颗粒体系内部会对其中力链和力网造成影响，截断或者重构，于是我们需要利用实验来验证。

为了澄清颗粒体系内部的电极加入是否会破坏这种变化规律我们比较了没有插入电极的颗粒体系电阻变化和插入颗粒体系点击后整体电阻的变化，来观察电极的影响。随后我们比较了三层颗粒中顶层颗粒和相同厚度（160mm）的单层颗粒在外加应力作用下的变化情况。

图 4-5 为分为三层（480mm=160mm*3）的颗粒体系整体电阻随外界压应力的变化情况以及没有分层时 480mm 电阻的变化情况与三层时总电阻的变化情况对比。左图为直角坐标系，右图为对数坐标系。

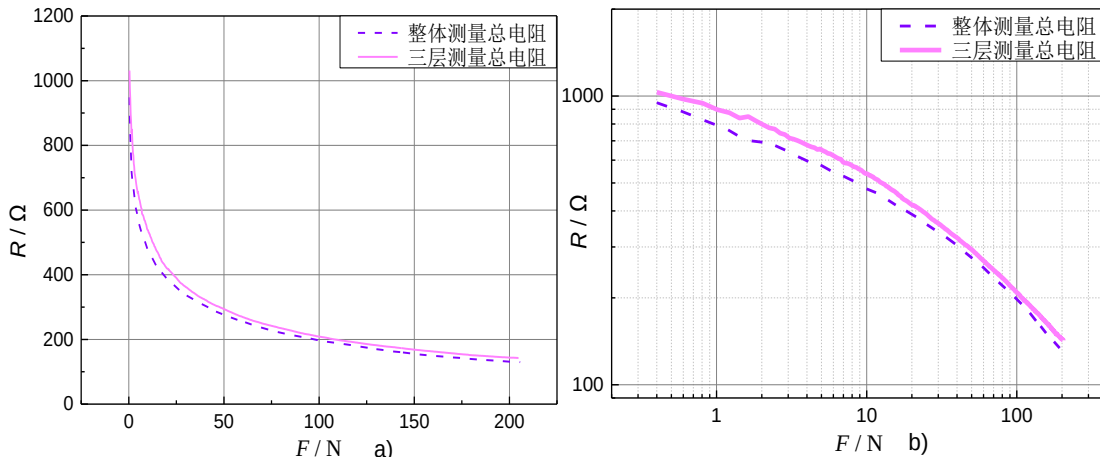


图 4-5 480mm 颗粒在单层和分为三层时内部电阻随压应力的响应关系。a) 图为直角坐标两条曲线间几乎没有差别，b) 图为对数坐标有细微差别，但在误差允许的范围内。

我们可以看到颗粒内部的电阻在压应力作用下的响应情况不会受到内部电极的太大影响，其中在开始时的些许差别主要来自三层电阻下部受压较大，初始电阻较低缘故。但是我们可以看到两种情况下的电阻变化情况几乎相同，并且趋势也一致。通过实验结果的分析并且排除误差的影响，我们可以将内部电极的影响忽略。

由于这种情况下内部分为了三层，我们还将考察每一层颗粒受到的影响是否会因为电极的加入而改变，比较的对象为 160mm 的单层颗粒电阻的变化情况。

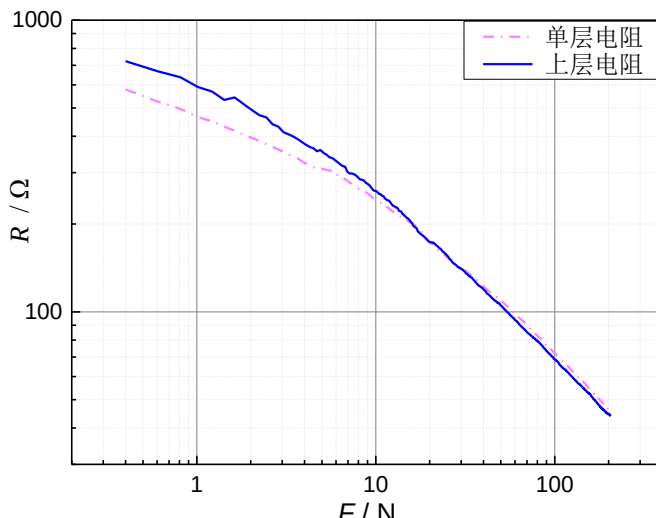


图 4-6 单层 160mm 颗粒与三层颗粒体系中上层 160mm 颗粒电阻随压力变化的响应关系图，蓝色实线为三层颗粒中的上层颗粒，下方粉红色虚线为 160mm 的单层颗粒。

我们可以看到这两条曲线有着些许的差别，初始电阻不一致主要是由于测量时单层电阻承受了全部的压力而三层电阻的部分压力被下部电阻承担，所以三层电阻的上层电阻较大。但是我们可以看到在末端变化几乎趋于一致，这说明两种情况都符合相同的变化规律并且变化的电阻值在力较大时也是一致的。我们可以得到结论是插入铁片电极几乎不影响颗粒体系电阻值随压力变化的实验特性曲线。

通过了上面两个实验我们澄清了插入电极对于颗粒体系电阻值随压力响应特性的影响，说明我们的测量方法不会产生较大误差，测量的数据和总结的规律基本符合事实。

4.2 PP 颗粒中静态电阻随厚度的变化关系

在测量分层的竹炭颗粒电阻随压力的变化关系后，我们发现颗粒体系内电阻在纵向（竖直方向）上分布是不均匀的，一部分变化较大，一部分变化较小，存在一定的变化规律。于是我们认为通过这一现象探索和理解颗粒体系的电阻值随厚度这一变量的变化情况。我们发现导电颗粒电阻随压力变化的关系比竹炭中更为强烈。同时考虑到导电塑料的特征尺寸小，在较薄的厚度时依然存在几层的分布，利于试验中对小厚度进行测量。

我们提出一种思路，即把颗粒上方的压力加载看做是不断加高的颗粒柱，相当于利用相同作用力的颗粒来代替原来的压力加载。但是这其中要考虑到粮仓效应的压力饱和现象。但在我们实验厚度下，压力饱和效应不会产生太明显的误差。为了探究颗粒内部受力情况，我们进行了静态电阻测量的实验。同样测量时将，做十次测量取平均值。

需要注意的是，颗粒堆的电阻并不是恒定的。当我们构造颗粒堆完成后在颗粒堆上部放置铁片电极时，相当于对颗粒体系造成了一个较大的扰动，颗粒体系在扰动作用下电阻会剧烈变化，并且呈现指数规律的衰减。我们测试过在将电极放置到颗粒堆上方时，测量电阻值几乎会产生几千欧姆的跳变。所以需待颗粒体系电阻值稳定后进行测量。同时测量了 24 小时静态颗粒堆 12cmPP 导电塑料的时变特性，发现颗粒堆的电阻随时间不断减小，但减小的速度在衰减。但是在开始时极短时间内的快速跃变后，后面的电阻变化便趋于平缓。下图是两小时测量静态颗粒的时变特性曲线。

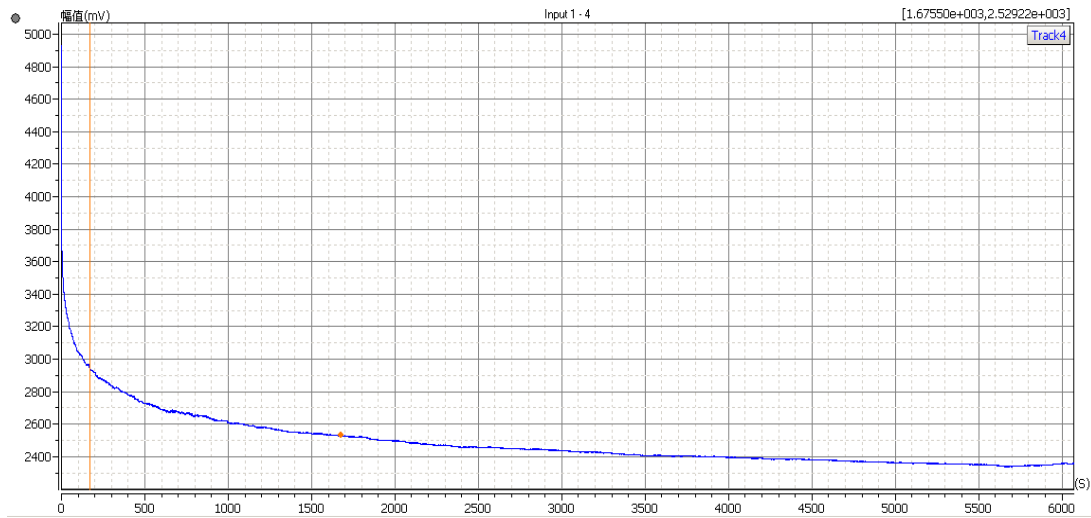


图 4 - 7 静态电阻的时变特性测量

我们分析认为颗粒体系类似于自坍塌系统，在重力压力的作用下，不断因为自身重力的作用加载到自身，压力增加，从而引起电阻减小。

4.2.1 不同厚度 PP 导电塑料颗粒电阻随时间的准静态测量

为了测量准确和统一实验结果，在尝试多个测量时间、观察不同厚度的电阻在此时间范围内的变化情况之后，我们决定采用 10 分钟（600s）作为实验的采样时间。取 0.7cm 到 48cm 间的厚度按二分法测量数据，共测量了七条数据曲线，每条由十条测量时间为 600s 的曲线平均而成。综合考虑了变化速度和取值的稳定性我们选择了图中的数值线来测定电阻值，得到了下图所示的实验结果。

图 4-8 是测量不同厚度 PP 颗粒导电塑料两端电压随时间的准静态变化过程。不同于我们以往的经验，颗粒堆的电阻（分压变化意味着电阻同时变化，这里使用电压的原因是在读出电压值后只需要计算出一个点的电阻即可）是在随时间变化的。虽然在电极放置到颗粒上端时会对颗粒造成扰动，但是颗粒体系的电阻在时间较长的过程中依然在衰减变化。

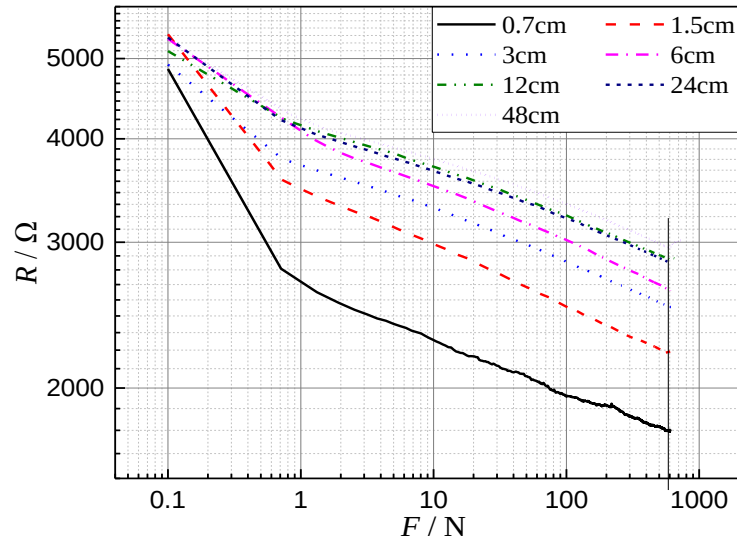


图 4-8 不同厚度 PP 导电塑料颗粒堆两端准静态分压 (mV) 的变化情况

我们可以将上图表示出颗粒的变化行为解释为两段：第一段下降较快，主要是由于放置电极片后带来的扰动，由于颗粒体系是强烈的耗散系统，所有扰动带来的干扰会被颗粒体系在 1s 内吸收完毕。并且扰动后不同厚度 PP 导电塑料颗粒的初始电阻都趋于相同，我们认为这个趋同初始电阻主要来自电极和颗粒体系接触过程中产生的，与颗粒体系厚度无太大的关系。第二段下降较为缓慢，我们认为这是颗粒体系自身在重力作用下的自坍塌过程，随着时间的增加不断减小，重力对其的作用是需要层层传递和均匀的。这段的变化和颗粒物质本身的特性有关。

注意到图中的坐标轴，横向为时间对数坐标，纵向为电压对数坐标。其中几条线的尾部有翘起，这主要是由于测量结束时的扰动造成的。我们取值避开这一区域即可。

综合理论分析是实验结果，观察曲线在较长测量时间下都趋于平行，其间相对关系也应该一致。我们选择了不同颗粒体系在 500s 时的电压分压值，由欧姆定律计算出此时的电阻值，并由此作为此颗粒体系的准静态电阻。我们发现颗粒体系的电阻随厚度的变化规律如下图所示，在高度较小时呈现出指数的变化规律，在高度较大时则是线性的变化规律：

从图 4-9 中我们发现颗粒体系的电阻和长度（厚度）不是线性的关系，而是近似于指数关系和线性关系的结合。这极大地不同于连续体中的情况。我们发现颗粒体系内部的时变特性后，启发我们将颗粒体系的电阻随压力的变化转换为随厚度的变化。将加载力的大小转换为具有相同重力的颗粒，将这部分颗粒直接加到原颗粒上方即可。底部这层颗粒的电阻随力的变化即可转换为随颗粒体系高度（厚度）的变化关系。如果我们可以得到确切的公式描述电阻随高度变化这一过

程，那么就同样可以得到和外力加载情况下颗粒体系电阻变化的相同情况。

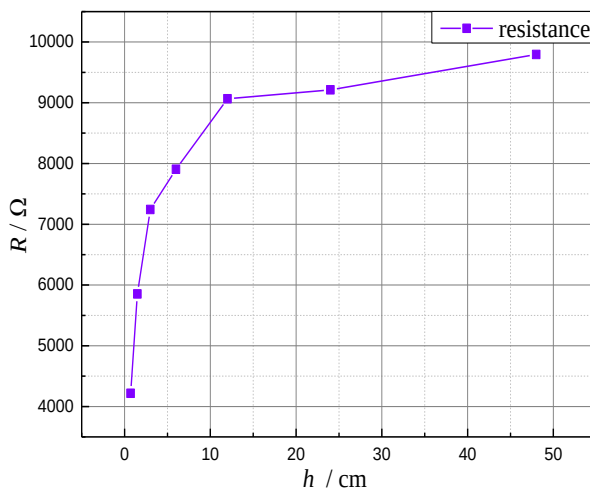


图 4 - 9 PP 颗粒体系电阻随厚度的变化规律

综上所述，我们发现了颗粒体系内部力分布不均匀，存在各项异性的力，这些力来自于力链和力网。我们发现可以将颗粒体系电阻随外力的变化情况转换为随高度的变换情况。同时就将内部力的变化情况转换为了对颗粒体系高度的变化。

4.2.2 颗粒体系电阻随厚度变化的分析与拟合

通过观察发现颗粒体系电阻随厚度的变化趋势近似于指数小于 1 的指数函数，于是我们对其进行拟合以便进一步分析。

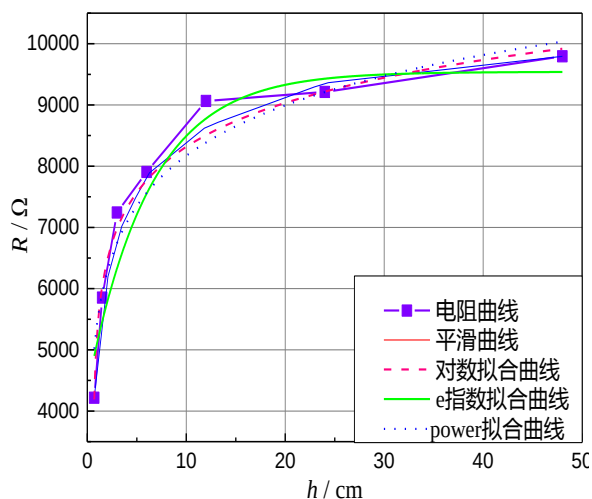


图 4 - 10 导电塑料颗粒随压力变化的试验曲线拟合

对于几种不同的拟合方式对应于不同的曲线。我们首先对实验得到的曲线进

行了平滑处理，因为试验中得到的数据点有限，试验曲线不够平滑。平滑后有助于利用软件进行拟合。

表 4-1 三种拟合函数的参数情况

对数拟合	Log3P1	Value	Standard Error
Equation	$y = a - b \cdot \ln(x + c)$	--	--
Parameter	a	6087.509	74.487
Parameter	b	-992.713	23.870
Parameter	c	-0.552	0.0248

指数函数	ExpDec1	Value	Standard Error
Equation	$y = A1 \cdot \exp(-x/t1) + y0$	--	--
Parameter	y0	9540.746	55.195
Parameter	A1	-5188.815	219.010
Parameter	t1	6.255	0.458

幂函数	Allometric2	Value	Standard Error
Equation	$y = a + b \cdot x^c$	--	--
Parameter	a	$-1.809 \cdot 10^6$	$1.393 \cdot 10^8$
Parameter	b	$1.815 \cdot 10^6$	$1.393 \cdot 10^8$
Parameter	c	$6.531 \cdot 10^{-4}$	0.050

通过上式的拟合我们发现，颗粒体系电阻随厚度的变化更符合幂函数或者是对数的变化规律，于是我们将上图中的曲线放到双对数坐标中去分析，比较出最合适的一条曲线来拟合实验曲线。

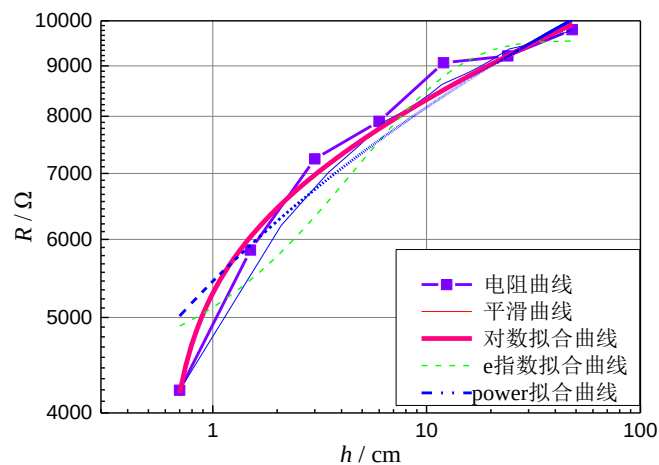


图 4 - 11 对数坐标下不同函数对电阻值的拟合情况

在图 4-11 中粗实线是最为接近的对数曲线，power 为指数函数直线，e 指数为最下方点线。带数据标签的为实验曲线。可看出对数函数的拟合曲线与带数据标签的试验曲线较为接近。利用的 $R = a - b \ln(x + c)$ 形式来拟合实验数据，得到了较好的结果；为了验证双对数的存在，我们同时还对导电塑料颗粒体系的电阻进行了分段拟合，拟合函数同样是分段幂函数：

$$R = a_1 F^{-b_1}, R = a_2 F^{-b_2} \quad (4-1)$$

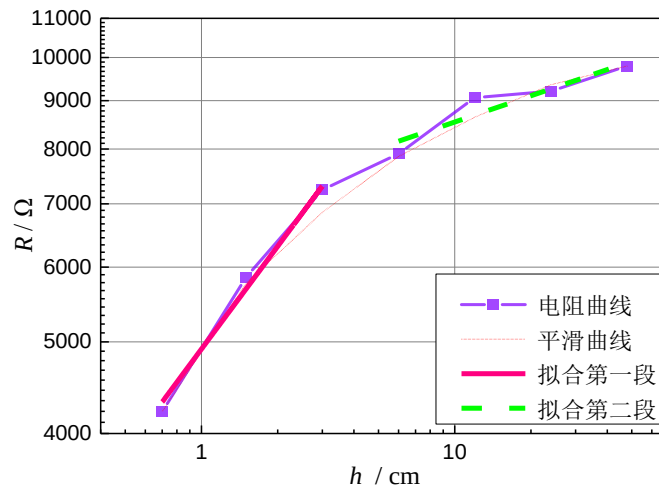


图 4 - 12 分段拟合导电塑料随颗粒体系的变化曲线

分段拟合的曲线效果很好，第一段的指数系数为 0.36143107 标准差为 0.036226970，第二段指数系数为 0.0920464 标准差为 0.02337818。第一段初始情况下压力趋近于 1/3，第二段趋近于饱和增加斜率变小。

表 4-2 拟合函数的参数情况

Part	指数位置 b	标准差
Part1	0.36143107	0.036226970
Part2	0.0920464	0.02337818

第二章在理论上结合了颗粒体系的电阻随压力的变化以及随厚度的变化来建立理论，在粮仓效应和江森模型的基础上探索上述现象的理论解释。通过理论和实验的比较发现变化趋势基本一致，并且物理图像清晰。

处于圆柱形颗粒体系内部的颗粒在不同的深度收到不同的压强作用。每一片层处的颗粒受到的压强可用江森模型表示出来。同时颗粒体系的电阻与受到的压力负相关，即压力越大电阻越小。那么准静态情况下的颗粒体系即可以视为多个电阻率变化的片层的集合，电阻率的变化满足江森模型在不同深度处的压强公式和

电阻定律，将电阻率在厚度方向上积分即可得到电阻随厚度的变化曲线。

4.3 本章小结

本章利用通过测量多层颗粒的电阻随压力的变化关系发现颗粒体系内部的电阻在纵向分布不均，于是探索了电阻随厚度的变化关系。我们利用特征尺寸较小的 PP 导电塑料颗粒测量了准静态无压力加载下颗粒体系的电阻随压力的变化。我们发现颗粒体系的电阻并不是恒定的，而是随时间不断减慢的衰减过程。其中衰减分为两段，开始时较快的一段吸收测量扰动的影响，而后较长时间则是颗粒自身重力的影响，使得颗粒的电阻随时间不断减小。最后取稳定情况下的颗粒电阻值，得到 PP 导电塑料颗粒体系随厚度（高度）的变化关系，不是简单的线性增加，而是在厚度较小时和厚度较大时以不同的规律增长。我们利用指数函数、对数函数以及幂函数拟合了实验结果，发现单个对数函数拟合较好，而分段拟合时，两端指数 power 形式的函数拟合也较好，说明颗粒物质随厚度变化的过程中也存在双对数规律。

结合赫兹接触电阻理论和江森模型的粮仓效应理论，得出颗粒体系电阻值随压力的变化趋势与实验值符合较好，实验中同样得到了具有饱和趋势的电阻厚度曲线。

结 论

本文主要研究了导电颗粒随压应力的相应特性。研究了竹炭颗粒随压力变化的纵向电阻、横向电阻以及分层电阻随压力的变化情况；研究了导电塑料在压力作用下的变化情况，并且测量了导电塑料颗粒电阻值随厚度的变化情况。我们发现颗粒体系的电阻随压应力的变化主要呈现出双对数的变化特点，可用分段幂函数拟合。其一，在压力较小时随压力的增加电阻减小较快，主要来源于上层颗粒电阻值的剧烈变化；其二，在压力较大时，电阻值的变化趋近于缓和，主要来自于两个方面的影响，一方面压力作用到颗粒体系上超过一定大小时，颗粒体系的电阻值会趋近于一个饱和值，其次颗粒体系受到的压力被侧壁摩擦力分担，容器底部受到的压力也会有一定的饱和效应。我们还发现颗粒体系的静态电阻随高度呈现出指数函数的变化规律，在厚度较小时，电阻随高度以指数小于一的规律变化，而在厚度增加到一定程度后，颗粒体系的厚度随高度（厚度）的变化呈现出线性增长。我们基于弹性接触理论，提出了随压力变化的接触面积是影响颗粒体系电阻的主要因素。同时结合江森公式得到不同深度处压力，代入欧姆定律，利用积分求出了电阻随厚度的变化关系。

本文的创新点在于以下几个方面：不同于以往对于连续介质的研究，本文主要研究了离散的颗粒物质中力链和力网的结构，并提出以电阻来表征颗粒体系内部力链和力网的变化关系。我们提出了将整体颗粒分层测量的方法，观察到了内部颗粒的电阻在纵向上的分布。这一工作启发了我们研究我们对颗粒体系电阻随厚度变化的研究。我们测量准静态情况下颗粒体系的电阻随厚度的变化情况，发现电阻随厚度的增加会出现饱和效应。随后提出了颗粒体系内部的片层模型，结合了赫兹接触电阻理论以及江森模型，得出了颗粒体系内部电阻随厚度变化的解析表达式，并且与实验曲线符合较好。

本文主要研究了颗粒体系的电阻值随压力和厚度的变化关系。目的是探索颗粒物质内部的结构以及力链和力网分布状态。未来对于颗粒体系内部的研究应更为系统和细致，首先可将颗粒体系的内部分层测量更为细致，将颗粒体系分为 4 层甚至 8 层测量。还应该测量颗粒体系薄层在压力作用下的饱和效应，以及不同深度处颗粒电阻随压力的变化关系。未来还应研究颗粒体系的径向电阻随压力和深度的变化关系，进一步改进实验系统（如电极、温湿度控制、颗粒尺寸形状选择），得到更为精确的实验结果。并且建立更为详细、合理的理论，搭建精密测量系统，由此出发研究颗粒体系内部的力链和力网结构。

参考文献

- [1] 陆坤权. 颗粒物质 (上)[J]. 物理, 2004, 33(09).
- [2] 孙其诚, 王光谦, 胡凯衡. 颗粒物质力学几个关键问题的思考[J]. 自然科学进展, 2008, 18(10): 1104-1110.
- [3] 孙其诚, 王光谦. 静态堆积颗粒中的力链分布[J]. 物理学报, 2008, 57(8): 4667-4674.
- [4] Bugnion L, Schaefer M, Bartelt P. Density Variations in Dry Granular Avalanches[J]. Granular Matter, 2013, 15(6): 771-781.
- [5] Garrett D, Ban H. Compressive Pressure Dependent Anisotropic Effective Thermal Conductivity of Granular Beds[J]. Granular Matter, 2011, 13(5): 685-696.
- [6] Yun T S, Santamarina J C. Fundamental Study of Thermal Conduction in Dry Soils [J]. Granular Matter, 2008, 10(3): 197-207.
- [7] Misra A, Singh V. Thermomechanics-based Nonlinear Rate-Dependent Coupled Damage-Plasticity Granular Micromechanics Model[J]. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2014: 1-31.
- [8] Meilikhov E Z. High-Temperature Conduction of Granular Metals[J]. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2001, 93(3): 625-629.
- [9] Kuchanov S I, Levich V G, Pis' Men L M. Transverse Diffusion and Heat Conduction in A Granular Layer[J]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1967, 8(3): 32-36.
- [10]. OrdÓnEz-Miranda J, Alvarado-Gil J J. Thermal Characterization of Granular Materials Using a Thermal-Wave Resonant Cavity under the Dual-Phase Lag Model of Heat Conduction[J]. Granular Matter, 2010, 12(6): 569-577.
- [11] Beloborodov I S, Lopatin A V, Vinokur V M, et al. Granular Electronic Systems [J]. Reviews of Modern Physics, 2007, 79(2): 469.
- [12] Spertl M. Experiments on Corn Pressure in Silo Cells—Translation and Comment of Janssen's Paper from 1895[J]. Granular Matter, 2006, 8(2): 59-65.
- [13] Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. Self-Organized Criticality[J]. Physical Review A, 1988, 38(1): 364.
- [14] Bak, Per (1997) How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality[M]. Oxford: University Press.
- [15] Vanel L, Howell D, Clark D, et al. Memories in Sand: Experimental Tests of

- Construction History on Stress Distributions under Sand piles [J]. *Physical Review E*, 1999, 60(5): R5040.
- [16] Wittmer J P, Claudin P, Cates M E, et al. An Explanation for the Central Stress Minimum in Sand Piles[J]. *Nature*, 1996, 382(6589): 336-338.
- [17] Matuttis H G. Simulation of the Pressure Distribution under a Two-Dimensional Heap of Polygonal Particles[J]. *Granular Matter*, 1998, 1(2): 83-91.
- [18] Ball R C, Blumenfeld R. Stress Field in Granular Systems: Loop Forces and Potential Formulation [J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88(11): 115505.
- [19] Landry J W, Grest G S, Silbert L E, et al. Confined Granular Packings: Structure, Stress, And Forces[J]. *Physical Review E*, 2003, 67(4): 041303.
- [20] Zhu H P, Yu A B. Averaging Method of Granular Materials[J]. *Physical Review E*, 2002, 66(2): 021302.
- [21] Hayakawa H. Simple Model for Granular Friction[J]. *Physical Review E*, 1999, 60(4): 4500.
- [22] Rossmanith H P, Shukla A. Photoelastic Investigation of Dynamic Load Transfer in Granular Media[J]. *Acta Mechanica*, 1982, 42(3-4): 211-225.
- [23] Liu C H, Nagel S R, Schecter D A, et al. Force Fluctuations in Bead Packs[J]. *Science-New York then Washington-*, 1995: 513-513.
- [24] Aste T, Di Matteo T, d'Agliano E G. Stress Transmission in Granular Matter[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2002, 14(9): 2391.
- [25] Zhang J, Majmudar T, Behringer R. Force Chains in a Two-Dimensional Granular Pure Shear Experiment[J]. *Chaos*, 2008, 18(4): 41107.
- [26] Krim J, Behringer R P. Friction, Force Chains, and Falling Fruit[J]. *Phys. Today*, 2009, 62(9): 66-67.
- [27] Daniels K E, Hayman N W. Force Chains in Seismogenic Faults Visualized with Photoelastic Granular Shear Experiments[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 2008, 113(B11).
- [28] Owens E T, Daniels K E. Sound Propagation and Force Chains in Granular Materials[J]. *EPL (Europhysics Letters)*, 2011, 94(5): 54005.
- [29] Bassett D S, Owens E T, Daniels K E, et al. Influence of Network Topology On Sound Propagation in Granular Materials[J]. *Physical Review E*, 2012, 86(4): 041306.
- [30] Kondic L, Goulet A, O'Hern C S, Et al. Topology of Force Networks in Compressed Granular Media[J]. *EPL (Europhysics Letters)*, 2012, 97(5): 54001.
- [31] Geng J, Howell D, Longhi E, et al. Footprints In Sand: The Response of a

- Granular Material to Local Perturbations[J]. *Physical Review Letters*, 2001, 87(3): 035506.
- [32] Tang J, Behringer R P. How Granular Materials Jam in A Hopper[J]. *Chaos-Woodbury*, 2011, 21(4): 041107.
- [33] Walker D M, Tordesillas A, Brodu N, Et Al. Self-Assembly in a Near-Frictionless Granular Material: Conformational Structures and Transitions in Uniaxial Cyclic Compression of Hydrogel Spheres[J]. *Soft Matter*, 2015, 11(11): 2157-2173.
- [34] Guo N, Zhao J. the Signature of Shear-Induced Anisotropy in Granular Media[J]. *Computers And Geotechnics*, 2013, 47: 1-15.
- [35] Muthuswamy M, Tordesillas A. How do Interparticle Contact Friction, Packing Density and Degree of Polydispersity Affect Force Propagation in Particulate Assemblies?[J]. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2006, 2006(09): P09003.
- [36] Creyssels M, Dorbolo S, Merlen A, et al. Some Aspects of Electrical Conduction in Granular Systems Of Various Dimensions[J]. *The European Physical Journal E*, 2007, 23(3): 255-264.
- [37] Dorbolo S, Ausloos M, Vandewalle N. Reexamination of the Branly Effect[J]. *Physical Review E*, 2003, 67(4): 040302.
- [38] Falcon E, Castaing B. Electrical Conductivity in Granular Media and Branly's Coherer: A Simple Experiment[J]. *American Journal Of Physics*, 2005, 73(4): 302-307.
- [39] Dorbolo S, Ausloos M, Vandewalle N. Hysteretic Behavior in Metallic Granular Matter[J]. *Applied Physics Letters*, 2002, 81: 936-938.
- [40] Bonamy D, Laurent L, Claudin P, et al. Electrical Conductance Of A 2D Packing of Metallic Beads under Thermal Perturbation[J]. *EPL (Europhysics Letters)*, 2000, 51(6): 614.
- [41] Castaing B, Laroche C. "Turbulent" Electrical Transport in Copper Powders[J]. *Europhysics Letters*, 2004, 65(2): 186-192.
- [42] Ambegaokar V, Cochran S, Kurkij Rvi J. Conduction in Random Systems[J]. *Physical Review B*, 1973, 8(8): 3682.
- [43] Da Costa V, Henry Y, Bardou F, et al. Experimental Evidence and Consequences of Rare Events in Quantum Tunneling[J]. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 2000, 13(2): 297-303.
- [44] Vandembroucq D, Boccara A C, Roux S. Breakdown Patterns in Branly's Coherer[J]. *Journal De Physique III*, 1997, 7(2): 303-310.

- [45] Zhang J, Zavaliangos A. Discrete Element Simulation of Transient Thermo-Electrical Phenomena in Particulate System[J]. Granular Material-Based Technologies, MRS Proceedings Boston, 2002, 759.
- [46] Zhang J, Zavaliangos A. Discrete Finite-Element Simulation of Thermoelectric Phenomena in Spark Plasma Sintering[J]. Journal of Electronic Materials, 2011, 40(5): 873-878.
- [47] Bourbatache K, Guessasma M, Bellenger E, et al. Discrete Modelling of Electrical Transfer in Multi-Contact Systems[J]. Granular Matter, 2012, 14(1)
- [48] Falcon E, Castaing B, Creyssels M. Nonlinear Electrical Conductivity in a 1D Granular Medium[J]. The European Physical Journal B-Condensed Matter And Complex Systems, 2004, 38(3): 475-483.
- [49] BÉQuin P, Tournat V. Electrical Conduction and Joule Effect in One-Dimensional Chains of Metallic Beads: Hysteresis under Cycling DC Currents and Influence of Electromagnetic Pulses[J]. Granular Matter, 2010, 12(4): 375-385.
- [50] Rubinger C P L, Leyva M E, Soares B G, et al. Hopping Conduction on Carbon Black/Styrene–Butadiene–Styrene Composites[J]. Journal of Materials Science, 2012, 47(2): 860-865.
- [51] Sheng P, Abeles B. Voltage-Induced Tunneling Conduction in Granular Metals at Low Temperatures[J]. Physical Review Letters, 1972, 28(1): 34.
- [52] Wolf A. A Theory of Electrical Conduction in Metals[J]. Physical Review, 1925, 26(2): 256.
- [53] Goldhirsch I, Sela N. Origin of Normal Stress Differences in Rapid Granular Flows[J]. Physical Review E, 1996, 54(4): 4458.
- [54] Meilikhov E Z. High-Temperature Conduction of Granular Metals[J]. Journal Of Experimental and Theoretical Physics, 2001, 93(3): 625-629.
- [55] Li N, Wu Q D. Electronic Conduction Properties of Silver Particles in Cesium Oxide[J]. Applied Physics A, 1991, 53(2): 172-178.
- [56] Jaeger H M, Nagel S R. Physics of the Granular State[J]. Science, 1992, 255(5051): 1523-1531.
- [57] Rickelt S. Discrete Element Simulation and Experimental Validation of Conductive and Convective Heat Transfer in Moving Granular Material[M]. Shaker, 2011.
- [58] 李脩然. 颗粒物质导电特性研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2013.
- [59] Popov V. Contact Mechanics and Friction: Physical Principles and Applications[M]. Springer Science & Business Media, 2010:72-73.
- [60] Sperl M. Experiments on Corn Pressure in Silo Cells–Translation and

- Comment Of Janssen's Paper From 1895[J]. Granular Matter, 2006, 8(2): 59-65.
- [61] Ovarlez G, Clément E. Elastic Medium Confined in A Column Versus the Janssen Experiment[J]. The European Physical Journal E, 2005, 16(4): 421-438.
- [62] Ovarlez G, Fond C, Clément E. Overshoot Effect in the Janssen Granular Column: A Crucial Test for Granular Mechanics[J]. Physical Review E, 2003, 67(6): 060302.
- [63] Vanel L, Claudin P, Bouchaud J P, Et Al. Stresses in Silos: Comparison between Theoretical Models and New Experiments[J]. Physical Review Letters, 2000, 84(7): 1439.
- [64] 李湘群. 侧面受限颗粒系统的 Janssen 转向比问题研究[D]. 中南大学, 2010.
- [65] 申志颖. 颗粒物质的粮仓效应及其与颗粒尺寸的关系 [D]. 哈尔滨工业大学, 2001.
- [66] Nedderman R M. Statics and Kinematics of Granular Materials[M]. Cambridge University Press, 2005.
- [67] Katsuragi H. Nonlinear Wall Pressure of a Plunged Granular Column[J]. Physical Review E, 2012, 85(2): 021301.
- [68] Marks B, Sandnes B, Dumazer G, et al. Compaction of Granular Material inside Confined Geometries[J]. Arxiv Preprint Arxiv:1505.04054, 2015.
- [69] Karim M Y, Corwin E I. Eliminating Friction with Friction: 2d Janssen Effect in a Friction-Driven System[J]. Physical Review Letters, 2014, 112(18): 188001.
- [70] Cambau T, Hure J, Marthelot J. Local Stresses in the Janssen Granular Column[J]. Physical Review E, 2013, 88(2): 022204.
- [71] Wen P P, Wang G, Hao D, et al. Bottom Stresses of Static Packing of Granular Chains[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2015, 419: 457-463.
- [72] Widisinghe S, Sivakugan N. Vertical Stresses Within Granular Materials in Silos[J]. 2012.
- [73] Malla R B, Anandakumar G, Ahn J. Experimental, Numerical, and Analytical Studies of Stress and Displacement in Full-Scale Beds of Activated Alumina Granular Material for Space Life-Support Systems[J]. Journal Of Aerospace Engineering, 2012, 27(2): 336-346.
- [74] 邓丛静, 张东升, 江泽慧, 等. 基于 DSCM 的竹炭力学参数测量及破坏分析[J]. 辽宁工程技术大学学报: 自然科学版, 2010, 29(2): 256-259.

攻读硕士学位期间发表的论文及其它成果

（一）发表的学术论文

- [1] 韩红, 姜泽辉, 李脩然, 吕晶, 张睿, 任杰骥. (2013). 器壁滑动摩擦力对受振颗粒体系中冲击力倍周期分岔过程的影响. *物理学报*, 62(11), 114501-114501.

哈尔滨工业大学学位论文原创性声明和使用权限

学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的学位论文《颗粒体系电阻值对压应力的响应特性研究》，是本人在导师指导下，在哈尔滨工业大学攻读学位期间独立进行研究工作所取得的成果，且学位论文中除已标注引用文献的部分外不包含他人完成或已发表的研究成果。对本学位论文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。

作者签名：任杰骥 日期：2015年6月28日

学位论文使用权限

学位论文是研究生在哈尔滨工业大学攻读学位期间完成的成果，知识产权归属哈尔滨工业大学。学位论文的使用权限如下：

(1)学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文，并向国家图书馆报送学位论文；(2)学校可以将学位论文部分或全部内容编入有关数据库进行检索和提供相应阅览服务；(3)研究生毕业后发表与此学位论文研究成果相关的学术论文和其他成果时，应征得导师同意，且第一署名单位为哈尔滨工业大学。

保密论文在保密期内遵守有关保密规定，解密后适用于此使用权限规定。本人知悉学位论文的使用权限，并将遵守有关规定。

作者签名：任杰骥 日期：2015年6月28日
导师签名：姜伟群 日期：2015年6月28日

致 谢

衷心地感谢导师姜泽辉教授对我的耐心指导。他不厌其烦的答疑和多次讨论让我对研究工作有了更深的理解。在学习生活上对我倍加关心，理解并支持我的想法，让我在这两年里获得了快速的成长。在实验的过程中悉心指导耐心答疑，创造了良好的实验和研究环境，没有姜老师的帮助，本课题的研究不可能顺利完成。感谢姜老师的大力支持，让我在研究生的学习生活中增长知识拓展视野，为以后的工作打下了坚实的基础。

感谢中科院的周海军研究员，多次讨论启发了本课题的研究；感谢李俊庆老师和申艳青老师对论文的修改和建议。还要感谢实验室老师和同学们的热情帮助和支持！

本课题承蒙自然科学基金资助，特此致谢。