

理学硕士学位论文

# 振动颗粒的分离与对流

吴晶

哈尔滨工业大学

2007年7月

国内图书分类号: O415

国际图书分类号: 539

理学硕士学位论文

## 振动颗粒的分离与对流

硕士研究生: 吴晶  
导师: 姜泽辉 教授  
申请学位级别: 理学硕士  
学科、专业: 光学  
所在单位: 物理系  
答辩日期: 2007年7月7日  
授予学位单位: 哈尔滨工业大学

Classified Index: O415

U.D.C.: 539

Dissertation for the Master Degree of Science

# SEGREGATION AND CONVECTION IN VIBRATED GRANULAR BEDS

|                                       |                                |
|---------------------------------------|--------------------------------|
| <b>Candidate:</b>                     | Wu Jing                        |
| <b>Supervisor:</b>                    | Prof. Jiang Zehui              |
| <b>Academic Degree Applied for:</b>   | Master of Science              |
| <b>Speciality:</b>                    | Optics                         |
| <b>Affiliation:</b>                   | Department of Physics          |
| <b>Date of Defence:</b>               | July, 2007                     |
| <b>Degree-Conferring-Institution:</b> | Harbin Institute of Technology |

## 摘 要

颗粒物由大量可以独立运动的固体小颗粒构成，它广泛存在于我们周围并与我们的生活息息相关。对它的研究涉及多个领域：工业、农业、建筑业、医药业等，而且滑坡、泥石流、雪崩、沙尘暴等自然灾害也与颗粒物质的运动规律的密切相关。所以对颗粒物质的研究具有重要的经济价值和社会效益。

颗粒物可以表现出类似于固态、液态、气态的特性，但又具有丰富而独特的行为。对颗粒物特性的认识和利用由来已久，早在 14 世纪，水手就采用沙漏计时。但直到近些年才开始对颗粒物质的物理行为进行深入研究。尤其振动颗粒体系中的对流运动和‘巴西果’分离效应更是引起了人们浓厚的兴趣，因为它们在基础研究与应用领域有着重要作用。对流运动指的是颗粒物体系内部形成的闭合的颗粒运输现象；‘巴西果’分离效应指的是振动下的颗粒物体系中的大颗粒的上升运动。本文对相关结果进行了简要概述，并对竖直振动下窄容器中颗粒物表现出来的对流运动和‘巴西果’分离效应进行了实验研究和初步分析。

我们的研究表明，在细长圆筒形容器中对不同尺寸的不锈钢球进行竖直振动时，存在对流态和无对流运动态。当颗粒尺寸较大 ( $\geq 1\text{mm}$ ) 时，颗粒可以进入无对流状态，尺寸较小时为对流态。在无对流态时没有‘巴西果’分离效应，而有对流时存在着明显的‘巴西果’分离效应。这表明对流运动是产生‘巴西果’分离的一种重要机制。我们通过测量大颗粒由底部上升至颗粒床表面所用的时间来研究‘巴西果’分离效应。实验表明分离过程主要受振动频率和振动加速度的控制，但温度和空气湿度也会产生影响。实验中还观察到颗粒床对容器底冲击力的倍周期分岔现象。颗粒床的二倍周期和四倍周期运动对大颗粒上升产生抑制作用，使对流速度减慢，从而延长了分离时间。对分离时间受倍周期运动的影响通过完全非弹性蹦球模型进行了初步分析。

**关键词** 颗粒物；‘巴西果’分离；对流运动；倍周期分岔

## Abstract

Granular materials consist of a large number of solid particles that can move independently. Such matter is ubiquitous in the world around us and is closely bound up to our daily lives. Studies on them are related to the processes in industry, agriculture, construction, and pharmaceutical industry, and also to some disasters, such as landslide, mudflow, avalanche, and sandstorms. As such, it can be said that any advance in understanding the physics of granulars is bound to have a major economic impact.

Granular materials have properties that are different from those commonly associated with either solids, liquids, or gases, and exhibit various unique behaviors due to their discreteness. They have been realized and utilized by people for a long time. Earlier in the 14th century, mariners have begun to make use of sandglass for timing. Only to recent years the properties of granular materials have been extensively studied, however. Particularly, the convection and “Brazil nut” segregation in vibrated granular systems have attracted great attention because of their importance in fundamental and practical research. Convection commonly occurs in vibrated granular beds, that the particles move downward along the container side wall and upward in the interior of the bed. The ‘Brazil nut’ segregation is known as that a larger intruder particle embedded in a sea of vibrated small particles often rises and then stays on the top of the bed. In this thesis, we will give a skeleton for the studies reported in literatures on the convection and “Brazil nut” segregation in vibrated granular materials, and then introduce the experimental investigation we made on them in vertically vibrating narrow cylindrical containers.

Our investigation indicates that the stainless steel spheres contained in a vertically vibrating narrow tube could be evolved into a state with convection or with no convection, depending on the size of sphere. When the diameter of the spheres is larger than 1 mm, the spheres are in a no convection state, while when the diameter is less than that, a convection state. It observed that the ‘Brazil nut’ segregation only takes place in the bed with convection of particle. This indicates that convection of particle is a crucial mechanism leading to the size segregation occurring in vibrated granular beds. We investigate the segregation process

through measuring the time the larger intruder particle rises from the container bottom to the free surface of the bed of small particles. Our experiments show that the segregation is controlled by the frequency and acceleration of applied vibration, however subjected to the effect of room temperature and air humidity. In addition, it is also found the existence of period-doubling and period-quadrupling motion of the bulk of the bed depresses the segregation, slowing the convection velocity and thus increasing the segregation time. The influence of such subharmonic motion on the segregation time is analyzed on the base of a completely inelastic bouncing ball model.

**Keywords** granular materials; ‘Brazil Nut’ separation; convective motion; subharmonic bifurcations

# 目 录

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 摘要 .....                   | I  |
| Abstract .....             | II |
| 第 1 章 绪论 .....             | 1  |
| 1.1 课题背景 .....             | 1  |
| 1.2 本课题的研究目的和意义 .....      | 2  |
| 1.3 颗粒物质的研究现状 .....        | 2  |
| 1.3.1 颗粒物质的静态行为 .....      | 2  |
| 1.3.2 外加振动下颗粒物质的行为 .....   | 5  |
| 1.3.3 颗粒的流动特性 .....        | 7  |
| 1.4 本论文的主要研究内容 .....       | 8  |
| 第 2 章 窄颗粒床中的对流运动 .....     | 10 |
| 2.1 前言 .....               | 10 |
| 2.2 对流运动综述 .....           | 10 |
| 2.3 巴西果分离及其形成机制 .....      | 15 |
| 2.4 实验装置 .....             | 17 |
| 2.5 实验现象及分析 .....          | 18 |
| 2.6 本章小结 .....             | 22 |
| 第 3 章 ‘巴西果’分离效应的影响因素 ..... | 23 |
| 3.1 前言 .....               | 23 |
| 3.2 实验过程 .....             | 23 |
| 3.3 实验结果与数据分析 .....        | 24 |
| 3.3.1 振动加速度的影响 .....       | 24 |
| 3.3.2 振动频率的影响 .....        | 26 |
| 3.3.3 大颗粒尺寸的影响 .....       | 27 |
| 3.3.4 颗粒床倍周期运动的影响 .....    | 29 |
| 3.3.5 周围空气湿度和温度的影响 .....   | 30 |
| 3.4 本章小结 .....             | 34 |
| 第 4 章 完全非弹性蹦球模型 .....      | 35 |
| 4.1 前言 .....               | 35 |

|                           |    |
|---------------------------|----|
| 4.2 倍周期运动 .....           | 35 |
| 4.3 完全非弹性蹦球模型的建立和解析 ..... | 36 |
| 4.4 本章小结 .....            | 39 |
| 结论 .....                  | 40 |
| 参考文献 .....                | 42 |
| 攻读学位期间发表的学术论文 .....       | 46 |
| 哈尔滨工业大学硕士学位论文原创性声明 .....  | 47 |
| 哈尔滨工业大学硕士学位论文使用授权书 .....  | 47 |
| 致谢 .....                  | 48 |

## 第1章 绪论

### 1.1 课题背景

软物质这个科学名词是1991年由诺贝尔奖得主、法国物理学家德热纳在诺贝尔授奖大会上首次提出，指处于固体和理想流体之间的物质，即由大分子基因或固态小颗粒（其特征长度 $D > 100\mu\text{m}$ ）所组成的生物膜或散态物质体系<sup>[1]</sup>。包括液晶、聚合物、胶体、乳液、膜、泡沫、颗粒物质、生命体系物质等，它们在自然界、生命体、日常生活和生产中普遍存在，在技术上有广泛应用。

颗粒物质是软物质中的一种。颗粒物质是由大量的离散的固体小颗粒所构成的集合体，颗粒尺度在 $\mu\text{m} \sim 10^4\text{m}$ 范围的物质都可称为颗粒物质。而且颗粒物质在地球上广泛存在，且是被人们所最熟悉的物质类型之一，所以沙石、浮冰、矿石、粮食以及药品等都属于颗粒物质。正是因为颗粒物质广泛存在于我们的日常生活之中，与我们生活息息相关，所以对颗粒物质复杂的物理特性的研究引起国内外科学家们广泛的重视，并积极的投入到对颗粒物质的研究当中。

颗粒物质的特殊性就在于它既能表现出类似于固体的性质，又能表现出类似于液体或气体的性质。这就使得对颗粒物质的研究显得格外有意义。例如，静止状态下它能承受一定的剪切力，表现出一般固体的特性；但在一定条件下，它却也会像液体和气体一样流动，整体形状和体积都会发生变化，表现出一般流体的特性。这些特性导致颗粒物质的运动规律与一般的固体、液体和气体均不同。因此，需要对颗粒物质的特性及一般运动规律进行研究。

在我们日常的生产生活中，常常通过搅拌、振动、摇晃等方法来得到我们想要的结果，如粮食的除杂，优良种子的选取等。在工业、建筑业和药品业中，那些原材料（如药末、沙子、水泥等）都属于颗粒物质，人们常常需要对他们进行处理，使得颗粒混合物充分混合，但有时却事与愿违。人们在借助搅拌、振动、摇晃这些手段时，会发现颗粒表现出类似液体或气体的流动特性，正是这一特性使得颗粒混合物时而混合、时而分离。颗粒物质的混合程度关系到建筑的质量，药性的大小等等，进而与人民的生命财产密切相关。另外，自然界中很多的自然灾害，如沙漠化，泥石流，山崩，雪崩，滑坡等。这些都可以视为颗粒物质来处理。故对颗粒物质特别是颗粒物质的动态行为的研究具有重要的意义。迄今为止，对颗粒物质的研究已有了几个世

纪的历史，这期间国内外很多知名学者都参与到这个领域当中。但从物理上对颗粒物质的行为进行广泛研究却是最近一、二十年的事。颗粒物质的许多复杂行为仍然困扰着人们，仍需做进一步的研究。

## 1.2 本课题的研究目的和意义

目前对颗粒物质的运动规律及其物理本质的认识还很不深入，尤其是振动下颗粒物质的特性。本文的目的是要分析竖直振动下窄颗粒床中‘巴西果’分离现象和对流运动，以及他们与倍周期分岔现象之间的关系。窄振动颗粒床能较好的抑制多对对流卷的产生，这样有利于我们的分析研究。我们希望通过本次研究，能对‘巴西果’分离的形成机制以及大颗粒上升时间的影响因素有进一步的认识。

## 1.3 颗粒物质的研究现状

在我国，从历史文献的记载上可知，早在公元 412—589 年，颗粒物质的独特性质就已被人们所认知并应用于日常生活中。在农业生产中人们通过颠、摇、晃的手段去除粮食和种子中的砂石、土块和谷皮等杂质。至今在我国，这种农业除杂手段在小规模的家庭农业生产运作中还能时常看到。在古时，人们采用沙漏来计时而不选用水漏，是因为水流的流速会随压强或水位的高度的变化而改变；而从细孔中流出的沙粒的流速则具有不随压强变化而改变的特性，正是这种特性使得沙漏计时相较于水漏计时更为准确。

尽管颗粒物质的特性早就被人们所发现所利用，但被科学家所注意并系统研究却是从18世纪才开始的，而且是因为工程学中需要对这些物质进行处理才开始了对颗粒物质较为深入的研究，并经历了相当长的历史时期，且有许多著名的科学家都参与其中。如库伦、法拉第、雷诺等都曾经致力于颗粒物质的研究并推动了颗粒物质研究事业的发展。库伦提出沙堆倾斜角度与摩擦系数的关系，法拉第发现振动下颗粒物质中的对流现象，雷诺于1885年提出雷诺挤压膨胀原理。人们经过了一百多年的研究，对颗粒物质静态和动态特性的认识都取得了很大的进展。

### 1.3.1 颗粒物质的静态行为

1884 年，英国科学家Roberts<sup>[2]</sup>在研究粮仓底面的受力情况时首次观察到：在粮食堆积高度约在大于两倍底面直径后，粮仓地面所受压力达到饱和而不再增加，这就是著名的粮仓效应，这和液体在容器中所表现出的性质完

全不同。1895 年德国工程师Janssen采用连续介质模型<sup>[3,4]</sup>解释了粮仓效应，即粮仓底部压力趋于饱和的主要原因是由于颗粒之间的相互作用，垂直方向的力被分解到水平方向，由于摩擦力的存在，容器器壁支撑了颗粒的重量。2005 年，Bratberg<sup>[5]</sup>等人在窄颗粒仓中对Janssen的模型进行了验证。因为很多实验证实了在处理圆筒内颗粒与器壁间的相互作用时，采用Janssen模型方便有效<sup>[6]</sup>。所以这一模型至今仍被采用。

液体与固体间的一个主要区别就是任何一个切变应力都会引起液体流动。静止颗粒堆可以承受一定的应力而不发生屈服和运动的这种性质与固体很相似，但在有些情况下，一个很小的力却能促使颗粒堆流动甚至崩塌，这一性质又与液体很是相近，如在高山雪地，在 $30^{\circ}\sim 45^{\circ}$ 的斜坡最容易引发雪崩，往往产生雪崩的诱因仅仅是动物的行走，高声尖叫，或者是滑雪板的压力等等一些细小的外力作用。

对紧密排列的颗粒物质施压可使其体积膨胀。颗粒物质体系受压时，是否体积膨胀取决于颗粒间的排列程度。当颗粒物质排列极其紧密时，受压颗粒需先松动以便重新排列；然而，当颗粒物质原来处于松散状态，加压后会变得更紧密。

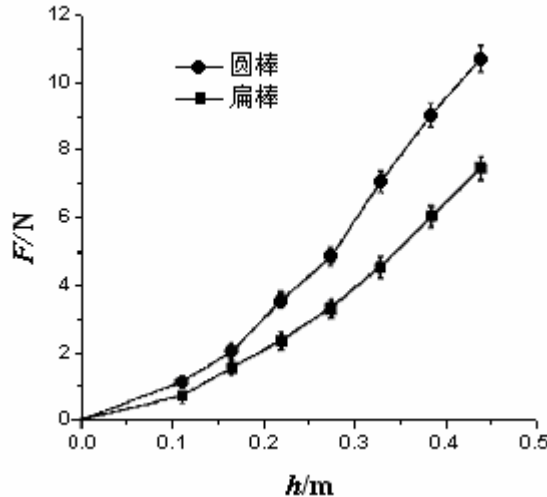


图1-1 棒受到的最大静摩擦力 $F$ 与颗粒堆积高度 $h$ 的实验关系曲线<sup>[7]</sup>

Figure1-1 The experimental curves of relation between largest static friction of stick and accumulated height of particle

将两根横截面周长、质量、密度均相同，只是外形不同的圆棒和扁棒分别插入同种液体和颗粒物质中至同一深度，将两棒拔出时会发现，从颗粒物

质中拔出圆棒所用的力气要大于扁棒，与在液体中的情况正好相反，在液体中拔出扁棒时所用的力气要大些。颗粒物质中的实验结果见图1-1<sup>[7]</sup>。

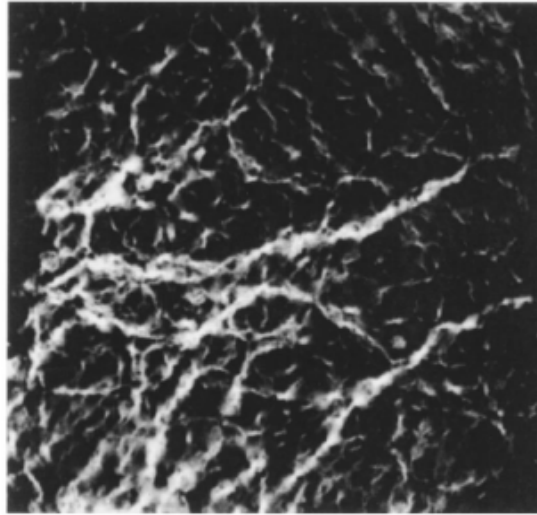


图1-2 颗粒中的力链<sup>[8]</sup>

Figure1-2 The press chain in granules

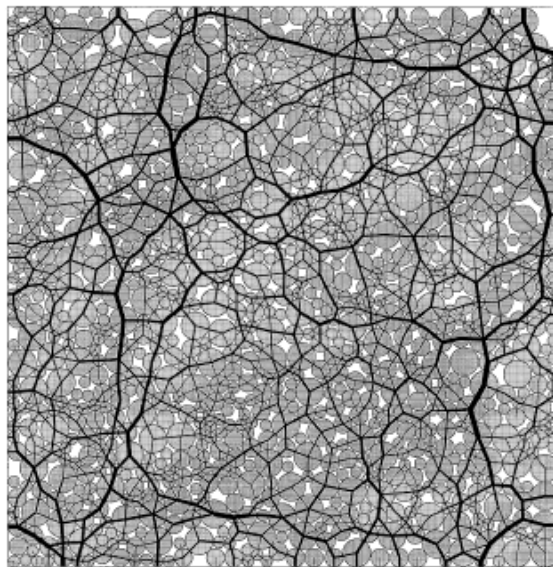


图1-3 沙堆中力链分布的模拟结果<sup>[9]</sup>

Figure1-3 The simulation of press chain in sand

这是因为在颗粒物质中,虽然颗粒中的应力分布是随机的力网分布结构,如图1-2<sup>[8]</sup>和图1-3<sup>[9]</sup>,但因为棒各处的部位与颗粒物质接触的方式不同,从而使得扁棒棱角附近的应力网更容易断裂,这就阻断了部分应力的传递,因此,扁棒所受最大静摩擦力较小,故拔出时所需的力也就较小。颗粒堆的物理特性不仅与颗粒本身的性质以及外界因素有关,还与颗粒物质堆积的历史有关。正是由于颗粒物质有历史效应,颗粒间的摩擦规律才变得异常复杂。近年来报道了许多有关研究颗粒间摩擦力规律和插入其中的棒所受到的静摩擦力的实验和模拟计算<sup>[10~15]</sup>,获得了不少有意义的成果。

### 1.3.2 外加振动下颗粒物质的行为

通过实验研究发现,容器内的颗粒物质在外加振动激励下,呈现类似流体的行为,如对流、堆起及表面驻波<sup>[16]</sup>等现象。

所谓堆起和对流指的是盛装在容器中的颗粒物质,当容器作幅值超过重力加速度的竖直振动时,会发现颗粒物质的上表面不再平整而是局部区域向上突起,以及与此同时在其内部也观察到了所形成的闭合颗粒输运的现象。

在实验室通过振动可在颗粒表面形成不同的美丽的图案——斑图。特别是在颗粒层厚度较小时,不太大的振动加速度就可形成丰富的斑图花样。其中Swinney<sup>[17~19]</sup>小组用实验和计算机模拟详细的研究了各类斑图的产生,得到了条纹、六角、四方的图案,并给出了形成这些斑图的频率和加速度范围的相图,见图1-4。颗粒斑图的形成是颗粒动力学理论研究的一个重要方面。要使两种液体均匀混合,通常的方法是通过摇晃或搅拌。对于两种不同的颗粒物质,这样做却往往会适得其反。振动引起的颗粒分离现象早就被人们所发现,并应用于日常生活中用来分离颗粒物质。然而,深入研究这种现象及其规律却是近几年才开始的。颗粒物质受到外界周期性竖直振动干扰时,通过控制不同的振动频率和振动加速度,可以形成三种不同的有序结构:(1)‘巴西果’分离:对混合物施加竖直方向的周期性振动时,大而重的颗粒将向上移动并停留在上面,最终形成大颗粒在上小颗粒在下的两层有序结构。(2)‘反巴西果’分离:即小颗粒在上大颗粒在下的稳定的分层现象。(3)‘三明治’式分离:即大而重的颗粒被夹在两层小的轻颗粒之间。2003年,史庆藩<sup>[20]</sup>等人在实验中首次观测到稳定的‘反巴西果’分离现象,并给出了不同 $\Gamma$ 和 $f$ 所对应的分层相图以及相应的侧视典型照片,如图1-5所示。同年姜泽辉等人通过实验观测到了新的分离现象——‘三明治’式分离<sup>[21]</sup>。混合颗粒振动分离现象是很普遍的,但人们对引起这种分离的动力学本质和影响分

离的各种因素的认识还很不够，是今后需要深入研究的课题之一。

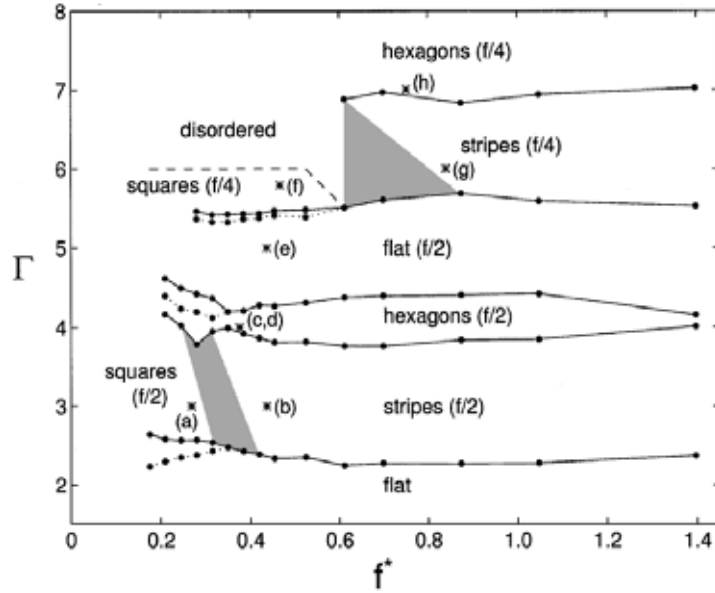


图 1-4 斑图形成的频率和加速度范围的相图<sup>[19]</sup>

Figure1-4 Stationary patterns in vibrated granular beds with different frequency and acceleration

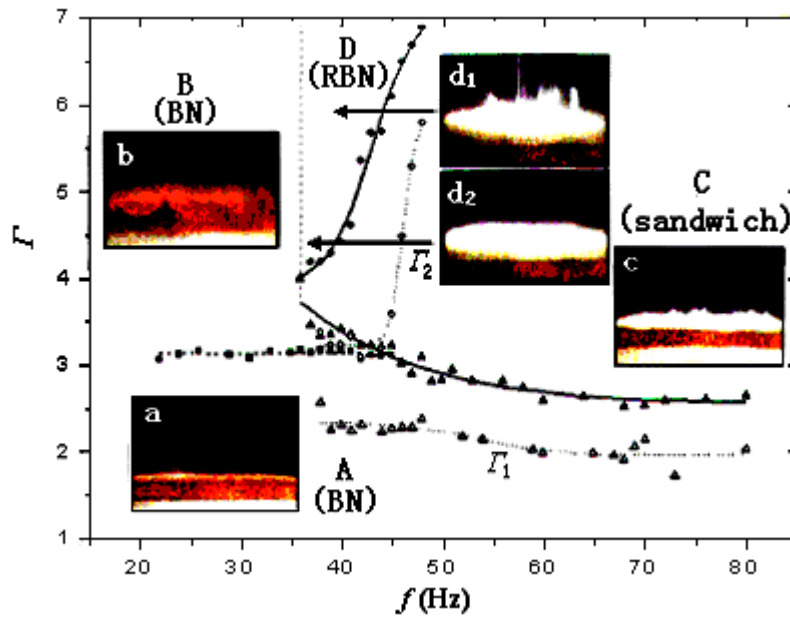


图1-5 不同振动加速度和频率作用下的颗粒混合物振动分离相图<sup>[20]</sup>

Figure1-5 Segregation in vibrated granular beds with different frequency and acceleration

### 1.3.3 颗粒的流动特性

在日常生活中遇到的交通流、人流、散态物料输送、雪崩和泥石流等都属于颗粒流。由于在日常生活和工业技术上颗粒流寻常可见，与物品的输送、公路上车辆流动等均密切相关，工程技术界早就十分关心这一问题。近年来，这类离散态颗粒物质的运动规律的研究引起物理学家的关注。

通过观测竖直管中的流动颗粒和从漏斗口流出的颗粒，会发现处于流动状态下颗粒的密度在空间和时间坐标上有起伏，流动颗粒的密度分布是不均匀。颗粒流的密度波的功率谱近似满足  $P(f) \sim f^{-\alpha}$  的规律，其中  $f$  为频率。实验和模拟计算得到的  $\alpha$  值相一致，结果大致为  $1.3 < \alpha < 1.5$  [22~24]。1998年，Moriyama 等人 [25] 对竖直管中颗粒流的密度波进行了比较仔细的研究，发现空气阻力与颗粒流中密度波的出现有密切的关系。颗粒在管中下落会产生自组织行为，形成密度波。

流动的颗粒物质通常具有稀疏、密集和阻塞三个状态。稀疏流是指颗粒堆积密度较低，颗粒之间几乎没有相互作用的流动，流量可以很大。当颗粒之间相互处于稀疏流动状态时类似流体，其流量  $Q$  与颗粒数密度  $\rho$ 、速度  $V$  和流经截面  $S$  成正比，即  $Q = V\rho S$ 。密集流是指颗粒间有相互作用的流动，而且流量降低。当颗粒处于密集流状态时，由于颗粒间或颗粒与器壁之间存在摩擦力以及相互碰撞，使得颗粒运动时有能量损失，从而影响流动使问题变的十分复杂。堵塞则是颗粒在出口处成拱，使颗粒处于停止流动的状态。针对颗粒物质流动各个状态的研究都已经取得了一些进展，有的已经提出了可描述的状态方程，然而对于各个状态之间转变的研究还很有限。最近徐光磊等人 [26] 通过实验研究通道宽度和初始流量与颗粒流从稀疏流变到密集流时临界开口的关系，得出开口尺寸  $D_c$  是通道宽度  $W$  和初始流量  $Q_0$  的函数，以及当开口尺寸远大于颗粒直径时，处于密集流状态下的颗粒流量与开口大小密切相关，而与初始流量  $Q_0$  及通道宽度  $W$  无关。鲍德松等人 [27] 研究了平面颗粒流的瓶颈效应及其与速度的关系得到了颗粒流的流量主要受颗粒流动速度和开口大小的影响。

Zuriguél 等 [28] 在对三维圆筒阻塞现象进行研究时发现：当出口尺寸大于临界的出口尺寸时，颗粒流从密集态到阻塞态的转变仅仅与通道的出口尺寸有关。当开口尺寸一定时，增大初始稀疏流量可发生稀疏流到密集流的转变。

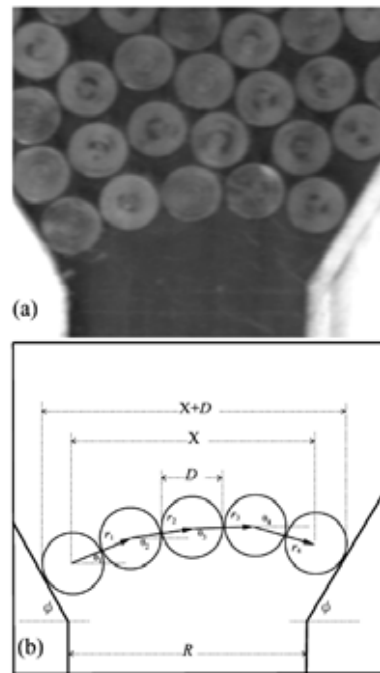


图1-6 a) 堵塞的典型图像; b) 成拱的构造<sup>[29]</sup>

Figure1-6 a)The typical image of jam; b)The structure of arching

To<sup>[29]</sup>等人通过一个二维颗粒流的系统来研究稀疏流到密集流的转变时发现当开口减小到约5个颗粒直径的尺度时，颗粒完全堵塞，流动停止。图1-6表示一个典型的堵塞情况下的成拱图像。可见，堵塞是由于颗粒成拱而造成的。颗粒成拱后可能会破裂，则颗粒继续流动。也可能不破裂，则发生堵塞现象。

## 1.4 本论文的主要研究内容

对流运动和‘巴西果’分离效应是振动下颗粒物质展现出的一个普遍且重要的现象，它们与堆起现象往往是相伴随着出现。近几年来，对流运动和‘巴西果’分离现象备受关注，人们通过大量的实验和计算机模拟来研究它们的影响因素及其产生机制。本文通过实验来研究窄振动颗粒床中的对流运动和‘巴西果’分离现象。本论文结构如下：第一章（绪论），介绍颗粒物质的研究概况。第二章，通过实验来研究窄振动颗粒床中‘巴西果’分离现象与对流运动之间的关系，分析‘巴西果’分离效应的形成机制。第三章，通过实验研究窄振动颗粒床中振动加速度、大颗粒的尺寸、振动频率、颗粒床

的倍周期运动、颗粒体系周围空气温度和相对湿度对大颗粒上升时间的影响。第四章，利用完全非弹性蹦球模型对大颗粒上升时间的影响因素给出理论解释。

## 第2章 窄颗粒床中的对流运动

### 2.1 前言

颗粒物质在竖直振动激励下会表现出多种多样的奇特现象，如颗粒混合物的振动分离现象、对流运动、颗粒六角密堆积排列和振动表面堆起等现象。颗粒混合物的振动分离有‘巴西果’分离、‘反巴西果’分离和‘三明治’式分离三种形式。人们一直致力于探究颗粒混合物振动分离的产生机制并且已经提出了多种说法，最近的讨论主要集中在几何填充和对流这两种机制上面。在本章的实验研究中发现：振动颗粒床中颗粒间频繁的非弹性碰撞导致在振动加速度不太大时，颗粒物质处于聚集态——颗粒密堆积在一起并且整体做上下运动，颗粒体系中无对流运动，而且在此情况下也不发生‘巴西果’分离效应；之后，又在针对更小的颗粒体系进行实验研究时发现虽然仍有聚集态出现，但是对流运动和‘巴西果’分离效应也都存在，本章着重研究‘巴西果’分离效应和对流运动之间的关系。

### 2.2 对流运动综述

物理学家对振动颗粒物质的研究最早起源于颗粒体系中的对流现象。1831年法拉第(Faraday)报告说在竖直振动的容器中，颗粒会形成对流运动。但是对这类现象广泛深入的研究却是最近几年才开始的。在颗粒体系对流运动的研究中，通常采用竖直方向上的正弦振动 $A\sin(\omega t)$ ，并用无量纲参数约化振动加速度 $\Gamma=A\omega^2/g$ 来标度振动的强烈程度。

科研人员经过大量的实验研究和计算机模拟发现了两种对流运动形式：一种是向下运动形式，又称为常规运动形式；另一种是向上运动形式，又称为反常规运动形式。

向下运动形式是指器壁附近的颗粒向下运动，容器中心轴附近的颗粒向上运动，形成闭合的对流卷，而且在颗粒体系上表面形成堆起，见图 2-1 中 a)。向上运动形式却正好相反，器壁附近的颗粒向上运动，容器中间的颗粒向下运动，形成对流卷，而且在颗粒体系的上表面形成溪谷，见图 2-1 中 b)。

1992年 Gallas 等人运用分子动力学方法进行计算机二维模拟，发现对流卷的数量和运动方向与振动加速度和器壁的粗糙程度、器壁向外倾斜程度有关。同年，Taguchi 通过大量的研究提出对流是由于颗粒间的弹性碰撞引起的。1995年，Hayakawa 等人又提出不稳定机制导致了对流卷的形成。下面对对

流运动的影响因素进行简单的概述。

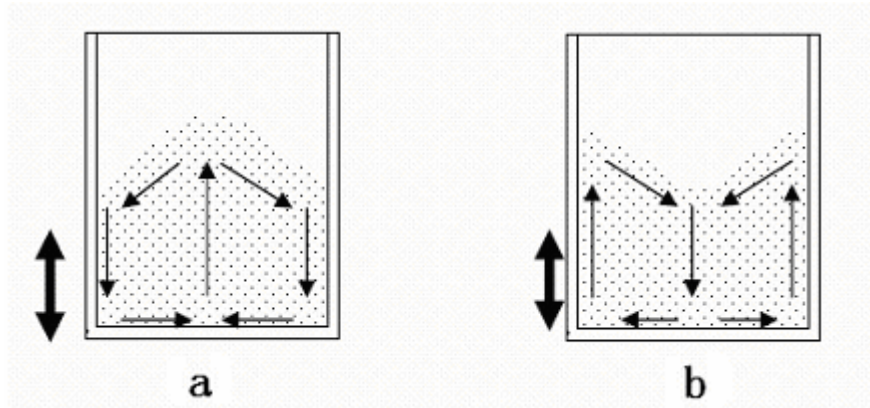


图 2-1 a) 向下运动形式；b) 向上运动形式

Figure2-1 a) Upward motion; b) Downward motion

科研人员在已有的研究中，无论是实验研究还是计算机模拟，均采用两类容器；一类是圆筒形容器，一类是直角六面体形容器。处于竖直振动下的圆筒形容器内的颗粒物质只形成一组对流卷，对流卷的运动方向和强度与侧壁向外倾斜程度和侧壁与颗粒间的摩擦力有关。然而，处在竖直振动下的直角六面体形容器中的颗粒物质会因振动加速度等因素的改变而形成一组到多组的对流卷。

早期的实验研究发现竖直振动下颗粒物质中的对流运动多是容器中心的颗粒向上运动，两侧靠器壁部分的颗粒向下运动形成的常规对流运动。Hsian<sup>[30]</sup> 等人通过实验发现对流运动的方向与器壁向外倾斜的角度有关，当器壁向外倾斜角度 $\theta_{wall}=0^\circ$ 时，容器内的对流为常规对流，随着 $\theta_{wall}$ 的逐渐增大，对流的运动强度在逐渐减小，当 $\theta_{wall}$ 增加到一临界值 $\theta_c$ 时，对流运动强度几乎为零，继续增加 $\theta_{wall}$ ，对流运动方向反转，即中间颗粒向下运动，四周靠器壁部分的颗粒向上运动，而且对流运动强度随器壁倾斜角度的增加而增强。而且Knight<sup>[31]</sup>等人也发现了这一现象：当器壁向外倾斜超过一定角度 $\theta_c$ （ $\theta_c$ 的大小与容器的粗糙程度有关）时，颗粒对流运动方向反转。后来Grossman<sup>[32]</sup>通过计算机模拟得出 $\theta_c=10^\circ$ 。

边界摩擦是形成对流运动的重要因素之一。颗粒与颗粒之间的摩擦力和颗粒与边界器壁之间的摩擦力的大小不同会导致颗粒体系存在着不同运动方向的对流。边界摩擦力的大小强烈地影响着对流的运动强度与方向。

Gallas<sup>[33]</sup>指出：对流也可以变成中间向下而四周向上的运动形式，对流运动方向的选取取决于颗粒与器壁之间的剪切摩擦力。随后Aoki<sup>[34]</sup>和Knight<sup>[31]</sup>相继用实验证明了这种观点，并且得到了摩擦力增强了对流效应的结果。Hsian 等人也通过实验发现竖直器壁表面越粗糙，即摩擦系数越大，对流现象越明显<sup>[30]</sup>。见图2-2，此图中Wall<sub>1</sub>，Wall<sub>2</sub>，Wall<sub>3</sub>的表面粗糙程度是依次递加的。由此图可以看出对流运动的流速在加快，强度在递增。

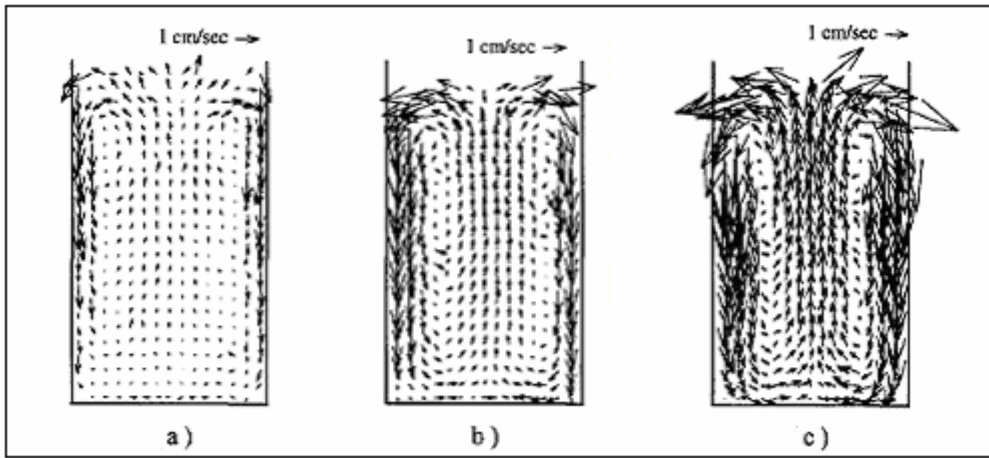


图2-2 竖直器壁容器粗糙程度对对流的影响<sup>[30]</sup>

Figure2-2 Velocity fields of granular beds of rectangular container ( $\theta_{wall}=0^\circ$ ,  $\Gamma=4$ )

a)Wall<sub>1</sub>; b)Wall<sub>2</sub>; c)Wall<sub>3</sub>,as the side walls of the granular beds,  $\Gamma=4$

振动加速度在颗粒物质的动态行为的形成中起着重要的作用。振动激励下的颗粒物质在振动加速度由 0 开始逐渐增加的过程中，可观察到颗粒物质的“固”“液”两种状态。Taguchi通过分子动力学模拟得出振动加速度存有一临界值，颗粒物质可在“固态”和“液态”两种状态之间转化，并且得到此临界值为  $1.2g$ <sup>[35]</sup>。当振动加速度低于  $1.2g$ 时，颗粒体系内部没有任何运动，整体表现类似于固态，当振动加速度高于  $1.2g$ 时，颗粒物质开始表面流化，进而在颗粒体系内部产生对流运动，表现出类似液态的行为特性。

Aoki<sup>[34]</sup>通过实验对矩形容器中的玻璃小球进行研究，将染色的玻璃小球作为示踪颗粒来观察对流运动情况，他发现当振动加速度超过一定临界值 $\Gamma_c$ 后，颗粒的对流运动方向也会发生翻转，由原来的常规运动形式变成反常规的运动形式；并且随着振动加速度的改变，对流卷的数目也会发生变化。在矩形容器中，一般情况是在低振动加速度的情况下，只出现一组对流卷，随

着振动加速度的增加，会在横向或纵向上形成多组对流卷。 $\Gamma_c$ 的大小也不是固定不变的，与很多因素有关，即使在同一容器中的同种颗粒物质， $\Gamma_c$ 的值也会随容器中颗粒体系静止时的高度 $H$ 的增加而增加，同时受颗粒物质尺寸 $d$ 的影响。Taguchi<sup>[35]</sup>通过模拟得出对流运动的纵向区域也随振动强度的增加而向颗粒体系的底层延伸，如图 2-3 所示，当振动加速度增大时，对流运动在向下延伸。

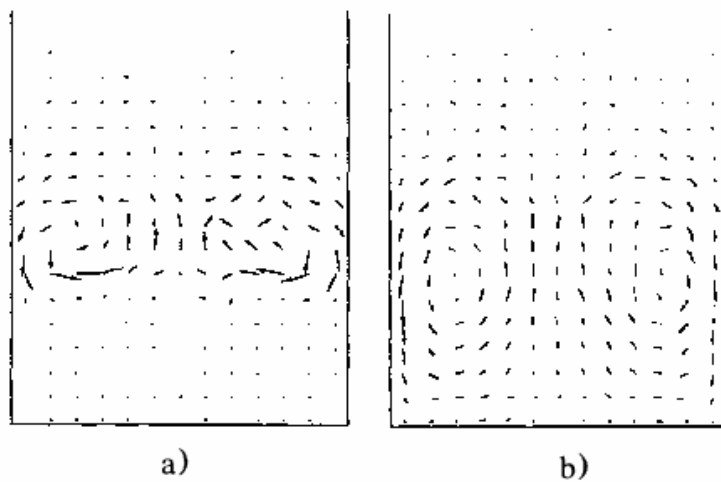


图 2-3 对流卷流动曲线，实线为容器。a)  $\Gamma=1.44$ ，b)  $\Gamma=2.71$ <sup>[35]</sup>

Figure 2-3 Cell-to-cell flow lines. Solid lines indicate the vessel. a)  $\Gamma=1.44$ , b)  $\Gamma=2.71$

对流运动不仅与盛装颗粒物质的容器形状和其向外倾斜程度有关，也受容器直径大小和颗粒填充高度的影响。关于此方面的影响情况，Wassgren<sup>[36]</sup>针对同一材质 ( $\rho=2500\text{kg/m}^3$ ) 的、直径 $d$ 处在 $0.9\text{--}1.1\text{mm}$ 间的颗粒物质进行了实验研究。通过大量的实验分析得出，对流卷的高度随初始填充高度的增加呈线性增加。边界向下运动的径向对流区域随 $w/d$ 的增加而增大，至 $w/d=100$ 时趋于稳定 ( $w$ 为容器直径尺寸)。

容器内颗粒物质的对流运动在各处的流速是不相同的。在圆筒形容器内，颗粒体系上部区域的颗粒运动速度较快，但随着深度的增加，速度也在减小。图 2-4<sup>[37]</sup>是Garcimartín等人的实验曲线，此图是器壁附近颗粒的运动速度与深度之间的关系曲线，从图中我们可以明晰的得出器壁附近的颗粒的流动速度随深度的增加而减小。

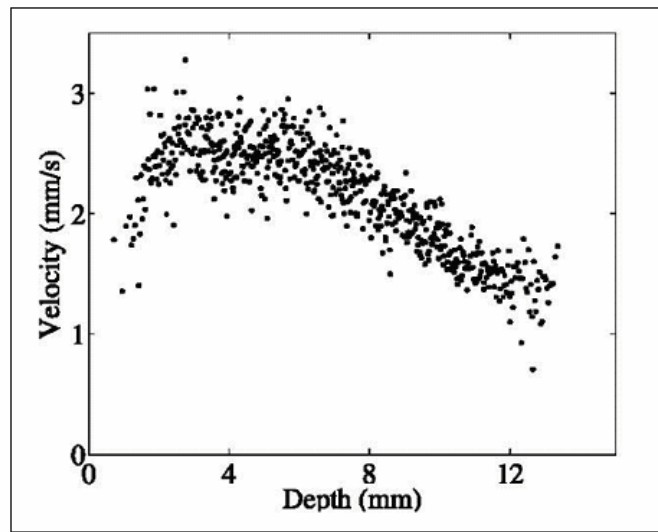


图 2-4 对流速度与深度的变化曲线<sup>[37]</sup>

Figure2-4 The curve of convective velocity under different depth

颗粒物质的动态行为也受到其内在气压的影响，尤其是在颗粒混合物中的影响更为明显。当气压降低到130Pa以下后，颗粒混合物中的气压影响效应就会消失<sup>[38]</sup>。在Park等人的实验中发现若颗粒中无间隙空气，对流和堆起都将被强烈的抑制<sup>[39]</sup>。

影响对流运动的因素除了上面已经介绍的还有：颗粒间的摩擦力，容器形状，振动频率，容器直径，颗粒尺寸等。

对流现象不仅存在于竖直振动下的颗粒物质中，在水平振动激励下的颗粒物质中也观察到了对流卷，而且比竖直振动下更容易观察到多对对流卷。Milica Medved<sup>[40]</sup>等人观察水平正弦曲线振动下矩形六面体容器中的褐色种子的运动时发现：当容器器壁为粗糙表面时，可观察到两对对流卷（四个对流循环），靠近上表面的对流卷是在容器器壁附近的几层内做相对运动——接近容器中心线的颗粒向上运动，沿器壁向下运动，如图2-5中的a)图。在其下面还有一对对流卷，他们的运动正与上面的对流卷相反——沿器壁向上运动，容器中心向下运动的对流卷。若容器器壁表面光滑，其他条件相同的情况下，则只能观察到一对常规对流卷，如图2-5中的b)图。也可以通过添加颗粒床的高度来实现从一对对流卷到两对对流卷的过渡。矩形六面体容器器壁为光滑平面时，Tennakoon and Behringer<sup>[41]</sup>发现了另一种对流运动形式，即对流卷沿器壁中心向上运动，如沸腾的开水一样沿四壁向下运动，如图2-5

中的c)图。Milica Medved等人通过实验得到,通过增加水平面上与振动方向相垂直的前、后两器壁的摩擦系数来实现对流的运动形式从图2-5中(b)图到(c)图的转化。

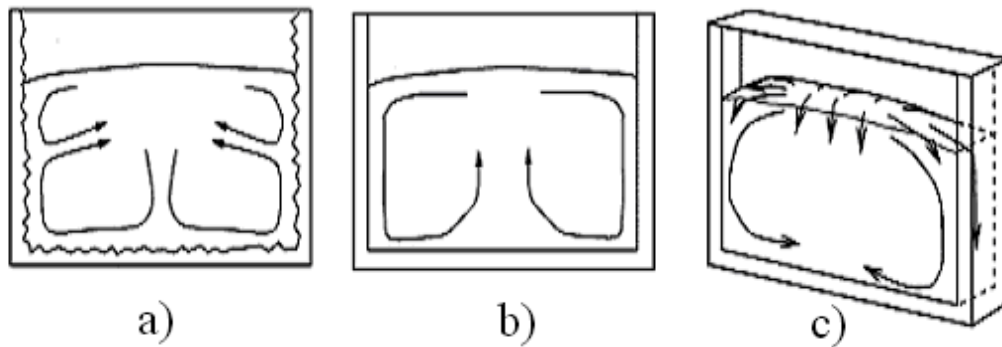


图2-5 矩形容器中对流运动形式<sup>[40]</sup>

Figure2-5 Convective movement form in rectangular container

## 2.3 巴西果分离及其形成机制

颗粒混合物的振动分离现象很早就引起了人们的注意。早在上个世纪 30 年代,南美巴西人在长途运输坚果过程中,发现盛装坚果的容器经过长时间的长途颠簸,到达目的地后,大的坚果总是上升至容器的上部。在欧洲也发现了类似的情况,以燕麦片和包括较大的巴西果在内的干果混合制成的穆兹利是欧洲人常用的早餐,人们发现,每天第一个从盒里倒出穆兹利的人总会得到更多的巴西果,而最后倒穆兹利的人却只能得到更多的燕麦片,颗粒混合物的振动分离现象中的‘巴西果’分离效应的名称就来源于此。科研人员经过长期的大量的研究发现,这一现象在剪切流动,垂直震动,以及旋转容器等情况下都会出现,并且又通过理论预言和实验研究相继发现了几种不同的混合物振动分离现象。1998 年,Shinbrot提出,在大小颗粒密度比适当的情况下,大颗粒有可能会下沉到容器底。2003 年,Hong等人通过考虑渗漏效应和凝聚之间的竞争,在理论上预言了‘反巴西果’分离效应的存在,史庆藩等人于 2005 在实验中首次观测到‘反巴西果’分离现象。2003 年姜泽辉等人又发现了一种新的有序分离结构,称之为‘三明治式’分离,即大而重的颗粒被夹在中间,其上下层都是小的轻颗粒层。Ludewig等人于 2005 年通过模拟得到了另一类分离现象,与‘三明治式’分离正好相反,小而轻的颗

粒夹于大且重的颗粒层中间<sup>[42]</sup>。前面提到的颗粒混合物振动分离现象，都是竖直振动下在竖直方向上的分层现象。但是随着研究的深入，科研人员发现了另一种混合颗粒振动分离现象——竖直振动下水平方向上的分离现象。2003年美国德州大学奥斯汀分校的Sung Joon Moon教授及其同事在实验和模拟两个方面都获得了新的研究成果——水平的‘巴西果效应’，他们发现利用扭结可以在水平方向上出现‘巴西果效应’。当搅拌速度非常高时，在容器内会存在着扭结，它将容器内的谷物分成两个区域(或者说两个相)。在扭结一边的谷物将向上运动，另一边的谷物将向下运动；而大颗粒的谷物从两个振荡区内流动出来向扭结处集中。科学家们可以通过调节趋动力信号来控制扭结在容器内的位置。这样就能利用移动扭结的位置来达到将容器一侧的大颗粒谷物进行集中收集。

长久以来，人们一直埋首于‘巴西果’分离的形成机理当中。为了得知颗粒混合物振动分离的形成机理，科研人员运用了几何因素分析，分子动力学模拟，蒙特卡罗方法等多种方法来进行研究，并在理论上提出了很多物理模型来加以解释，如几何填空模型、成拱模型、能量模型、对流模型、局部重排、二维模型等。但这些模型都有它们各自的适用范围和不足之处。最近关于分离机制的讨论主要集中在两个方面，即几何填空机制和对流机制。在下面，我们将进一步讨论这两种机制的机理和异同。

振动下，颗粒物质从密集态向稀释态过渡。在此过程中，重力和振动激励的共同作用下，颗粒在其周围上下振动使得颗粒间容易形成较大的空隙，因为小颗粒的尺寸小，所以小颗粒可以通过空隙进入大颗粒下面，正是由于小颗粒在下方的支撑作用使大颗粒停留在上部，最后形成颗粒重组。这就是几何填空机制。

然而，这种模型对于振动的振幅是有限制的。当振动振幅比较小时，因为颗粒间没有足够的相对运动所以不能产生较大的空隙，无法形成颗粒重组；然而当振动的振幅过大时，颗粒间产生的空隙也会很大使得大小颗粒都可以通过空隙，从而使得在此情况下也不能产生‘巴西果’分离。几何填空机制对于密闭容器中的稠密颗粒体系也是不成立的<sup>[43]</sup>，因为没有足够的空间来形成空隙使颗粒重组。这种模型对大颗粒的尺寸是有要求的，只有它足够大，相较于小颗粒而言，它才能有较小的填空几率。

‘巴西果’分离的另一种解释是对流引起的。对流现象是颗粒物质动态行为中最早被科研人员所关注的，但是直到1993年，Knight等人才将对流运动和振动分离现象联系起来，首次提出将对流运动作为颗粒混合物振动分离

的主要机制。振动下，在容器中心区域的颗粒向上流动，大颗粒随着颗粒的向上流动被带到颗粒床的上表面，继而运动到器壁边界。在器壁边界颗粒流是向下运动的，因为向下运动的颗粒流宽度很窄使得大颗粒不能随之向下运动而停留在上表面，如此循环下去就形成了‘巴西果’分离效应。对流机制不但能够解释‘巴西果’分离效应，也能对‘反巴西果’分离效应给出解释。通过改变容器器壁的粗糙程度<sup>[33]</sup>、器壁向外的倾斜程度或容器的外形<sup>[30~32]</sup>，都能够使对流的运动方向发生反转，从而形成‘反巴西果’分离效应。

彭亚晶<sup>[44]</sup>针对陶瓷颗粒混合物振动分离现象进行实验研究，通过实验数据分析发现：振幅、频率和振动加速度是决定哪个机制起主要作用的关键因素。但是在我们的下面的实验中却发现颗粒床中存有无对流运动的情况而且在此情况下也无‘巴西果’分离现象的产生。

## 2.4 实验装置

实验装置如图2-6所示，由信号发生器发出的正弦信号经功率放大器放大后输入激振器，激振器是电磁式的(JZK2100)，激振器的振动平台上可安装各式各样的容器。容器底是用铝合金做的用以减少静电效应。振动平台上有一个加速度传感器，它经过电荷放大器与加速度测量计相连，通过它们来测量振动平台的振动加速度。加速度传感器的精度为0.01g（g为重力加速度）。

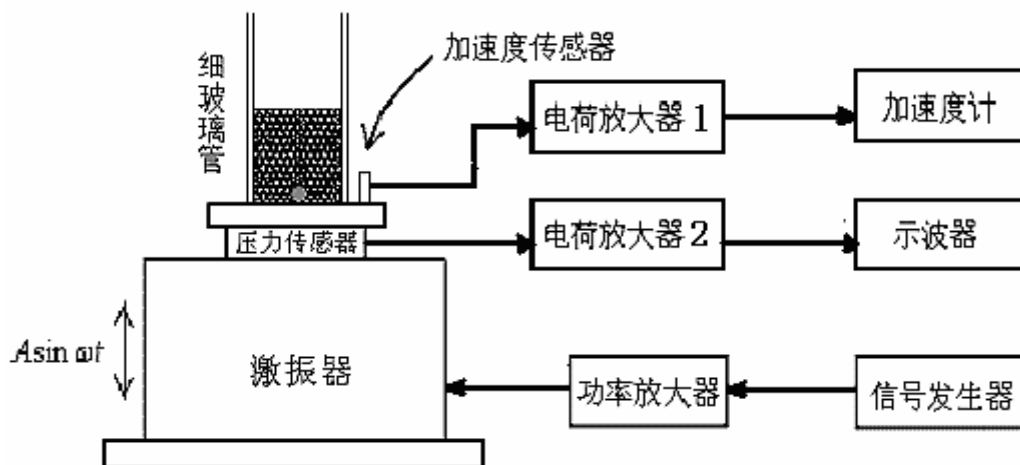


图 2-6 测量大粒子上升时间的实验装置图

Figure2-6 Schematic layout of experimental apparatus

在容器底和振动台面之间是压力传感器，用来测量颗粒对容器底的冲击力。压力传感器由压电晶体和不锈钢外壳构成，由于压电晶体的形变很小，在微米量级，故传感器的形变对整个系统运动状态的影响很小，可忽略不计。压力传感器经电荷放大器与示波器相连，用来观察压力曲线，压力传感器记录到的力包含了颗粒床和容器两者的作用。填加的高度用一个毫米精度的游标卡尺测量。

实验是在内径较窄的玻璃管内进行。颗粒体系也是由尺寸较小的不锈钢珠构成。台面在竖直方向上做简谐振动： $x = A \sin(\omega t)$ ， $\omega = 2\pi f$ ， $A$ 和 $\omega$ 分别为台面的振幅和角频率， $f$ 为台面的振动频率。人们通常用约化加速度来表示振动加速度，约化加速度 $\Gamma = A\omega^2/g$ ，我们这里也采用了此种表示方式，其中， $g$ 为重力加速度。电磁激振器提供的不是严格的纵向的简谐振动，有微弱的横向振动，横向的振动加速度不足于纵向加速度的 6%，所以横向简谐振动的影响可忽略不计。实验中，振动频率 $f$ 保持在常量 60Hz 处，空气的相对湿度控制在 40%-50%范围内。

## 2.5 实验现象及分析

首先，我们针对内径  $D=15.90\text{mm}$  的圆筒形玻璃管中尺寸  $d=1.00\pm 0.01\text{mm}$  的小颗粒体系进行实验研究。我们借助一个玻璃漏斗将颗粒倾倒入玻璃管中，填至某一指定高度。颗粒在重力作用下，因容器的限制，在管内无序的堆积。对颗粒床加以振动，振动是从一微小的固定值快速加至预定值，当然，固定值 $\Gamma$ 小于1而预定值 $\Gamma$ 一定要大于1。我们可观察到下列的实验现象：振动加速度一旦被施加，（预定的振动加速度较大时）颗粒就迅速运动，从透明的玻璃器壁可以观察到颗粒是沿着管壁向下运动的，到达容器底后向容器内部运动。从上向下观察颗粒床的上表面，颗粒不断的从容器中心向四周涌现，形成循环运动。这正是颗粒沿容器中心轴向上运动顺器壁向下运动形成循环的常规对流运动。但这种运动持续的时间很短。从侧壁观察会发现振动后不久，容器底部颗粒的排列变规则了，形成了六角密堆积排列。而且这种规则的排列同时向上和向内部延伸。在已形成规则排列的颗粒体系中，对流现象消失；然而，在颗粒体系的上部分，颗粒的六角密堆积排列尚未形成区域，仍存有对流运动。渐渐的，颗粒的规则排列蔓延至整个颗粒体系，对流现象彻底消失，颗粒床的上表面几层处于流化状态。颗粒床的上表面的流化层数会随振动加速度的增加而有所增加。当振动加速度较高时，颗粒床会形成聚集态，整体上下运动，在颗粒床底部与容器底之间形成一段空气层，见图 2-7。

随着振动加速度的增加，整体同步运动变剧烈，空气层的厚度也在增加。在整个实验过程中，颗粒床在竖直方向上振动的同时，作为一个整体也在一直沿器壁横向转动。

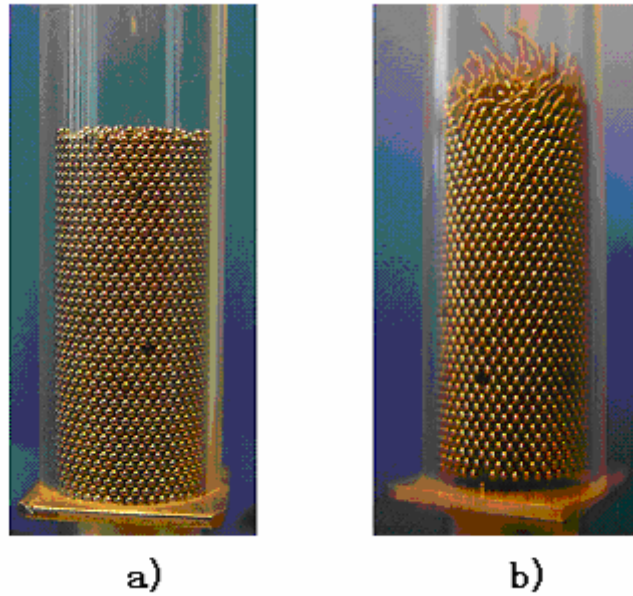


图 2-7 振动颗粒床中的规则排列结构与运动状态

a) 静止状态, b)  $\Gamma=9.8$   $f=60\text{Hz}$

Figure2-7 Regular packing structure and motion state in vibrating granular matters bed

a) Static state, b)  $\Gamma=9.8$   $f=60\text{Hz}$

关于‘巴西果’分离现象的形成机制，人们已经提出了很多理论模型。其中，Knight 提出了对流运动是形成颗粒混合物振动分离的主要机制。通过振动  $d=1.00\text{mm}$  的颗粒体系，我们得到了颗粒床中的无对流运动状态，进而想观测在无对流运动的情形下，‘巴西果’分离还会不会发生。

我们将细长铜丝黏附在一个直径  $D=6.40\text{mm}$  的不锈钢小球上，将此钢球分别置入  $d=1.00\pm 0.01\text{mm}$  的不锈钢小颗粒体系中的不同位置。实验过程中，我们对颗粒床外部的铜丝制作标记，通过标记来反映颗粒床中直径  $D=6.40\text{mm}$  的不锈钢小球（以下简称为大颗粒）的运动状态。实验表明，大颗粒在对流运动存在时有上升运动，在颗粒床由对流态向无对流态转变的过程中，大颗粒也有向上运动，但运动的距离很小。为了进一步证实，无对流运动的状态下颗粒混合物振动不发生分离，我们在颗粒床已经形成致密的六

角密堆积排列之后，通过向下按压金属丝的方式将大颗粒压入颗粒床中，因为大颗粒的引入势必会使得大颗粒上部的已形成的密堆积排列的颗粒体系遭到破坏，所以要在按入大颗粒至预定点后维持些许时间再放手，这样可以给已遭破坏的颗粒体系一些时间去恢复原有的密堆积规则排列。当然，在此过程中，振动一直处在进行中。实验现象表明，无论将大颗粒置于颗粒床中部还是下部都无振动分离现象出现。总而言之，在无对流运动的颗粒床中，‘巴西果’分离现象也不发生。

颗粒床的上表面始终存有明显的流化现象，调整振动加速度，当流化层数增加至可将大颗粒埋没数层时，将大颗粒压入这个区域。结果发现也无分离现象出现。

我们将大颗粒引入到颗粒床中必然会对颗粒床中已形成的规则排列造成一定破坏，造成一些点缺陷和线缺陷，从而产生较多的空穴，尤其是在大颗粒周围，但是在此情况下仍无‘巴西果’分离现象出现。可见，在我们的  $d=1.00\text{mm}$  实验系统中，对流是‘巴西果’分离的主要机制，几何填充机制所起的作用较小。

在此实验的基础上，我们针对更小的颗粒体系进行了实验研究。此次研究的颗粒体系分别是由  $d=0.50\pm0.01\text{mm}$  和  $d=0.07\pm0.01\text{mm}$  的不锈钢小珠构成。处于竖直振动激励下的颗粒体系，当振动加速度超过某一临界值后，开始表面流化（流化指的是在振动加速度很小的情况下，相较于颗粒床内部的颗粒，颗粒床表面的运动较为剧烈。当颗粒床上表面几层的密度迅速减小，类似于气体的密度，此时我们称颗粒已经流化）。一般情况下，这个临界值略大于重力加速度。在  $0.5\text{mm}$  的颗粒体系中得到约化加速度临界值  $\Gamma_c$  在 1.4 附近。在振动加速度未达到  $\Gamma_c$  时，就可观察到颗粒床上表面个别颗粒在其周围小范围内晃动。随着振动加速度的增加，晃动的颗粒越来越多，其晃动的程度也愈演愈烈，运动的范围也随之增大直至整个颗粒床上表面的颗粒均在运动。当约化加速度  $\Gamma$  达到  $\Gamma_c$  时，可明显观察到流化现象。通过透明玻璃容器器壁可以观察到：从颗粒床上表面为第一层开始至五、六层内的玻璃器壁附近的颗粒均向下运动。从颗粒床上表面可看到颗粒由中心涌出向四周运动，这说明至少在此区域内已形成对流运动。从侧壁观察，在此区域以下颗粒未有明显运动，只是存有点缺陷或线缺陷的临近粒子在轻微晃动。随着振动加速度的增大，可观察到沿器壁向下运动的区域不断扩大直至整个颗粒床（在  $0.5\text{mm}$  的颗粒床中振动加速度约为  $2g$  重力加速度的两倍时，对流运动充满整个颗粒床），这说明对流运动的区域伴随振动加速度的增大在向下不断扩大，与

Taguchi的模拟结论相吻合。继续增加振幅，振动加速度较大时，颗粒床底悬空，颗粒床底部与容器底之间存有一空气层，颗粒床作为一个整体在容器中上下振动，但是对流运动仍然存在；颗粒床上表面不再水平，出现大角度的斜坡，且斜坡伴随颗粒床的振动来回剧烈晃动。这就是高振动加速度下小颗粒床表面形成的表面波。在整个实验过程中，颗粒的运动速度随振动加速度的递增而逐渐剧烈，说明对流运动的流速随振动加速度的增加而增大。

在这两种颗粒体系的实验研究中发现，振动过程中（振动强度不是很小的情况下），颗粒体系中始终存有对流运动——常规对流运动。将一个尺寸较大的大不锈钢小球（以下简称为大颗粒）置入容器底部之后，在将小不锈钢小珠借助玻璃漏斗倒入玻璃管内，对容器施与振动后，可观察到大颗粒从容器底部上升至颗粒体系上表面——发生了‘巴西果’分离现象。改变大颗粒的尺寸，在这两种颗粒体系中仍发生‘巴西果’分离。

通过上面的实验结果可以得到这样的结论：在窄容器中，对流运动是产生‘巴西果’分离效应的主要机制。

在  $d=1.00\text{mm}$  的不锈钢颗粒床的实验研究中，我们还发现对流运动与颗粒床中的空穴率有关。将不锈钢小珠倾倒入容器的过程中，由于重力作用，颗粒会无序的堆积在容器底部，因为器壁的径向限制，在器壁附近区域的空穴率较于内部要高。颗粒床初经强度较大的振动形成强烈的对流运动。形成六角密堆积结构后，对流运动消失，但仍存有少量的点缺陷。尽管振动仍按原有强度持续着，但空穴率维持在某一较低值处不再变化。由此可知，颗粒床中的空穴在对流运动的形成中扮演了重要的角色。

当竖直正弦振动刚被施加时，颗粒通过填补空穴来调整自身位置。器壁附近的空穴相对较多，颗粒的填充的机会也更多。颗粒有横向填充空穴和向下填充空穴的机会，但是由于重力的作用，颗粒更倾向于填充其下面的空穴，颗粒填充了其下面的空穴后，那么它原有的位置被空出来又形成了新的空穴，由其上面的颗粒来填充，如此下去，一个颗粒的移动带动了其上面一系列颗粒的运动，从而形成了向下的流动。在实验中观察到：振动一开始，颗粒就迅速调整位置在竖直方向上成队排列，以便于颗粒快速的向下运动，到达容器底部后又向颗粒床内部运动。这是由于颗粒到达底部后，上面的颗粒继续向下运动，使得到达底部的颗粒的上部颗粒密度增大，压力也增大，在压力和碰撞能量传递的共同作用下，颗粒必须继续运动，但是由于器壁和容器底的限制，颗粒只能去横向填充空穴，故颗粒运动到底部后向内部运动。颗粒床内部也有很多的空穴，器壁附近的颗粒不断涌入颗粒床内部使得其下部分

密度增加，迫使颗粒沿中心轴向上运动。这样就形成的对流运动。当振动持续一段时间后，颗粒床内部的空穴越来越少，颗粒向上运动的难度变大，最后在颗粒床底部形成密堆积结构。颗粒床上部的空穴率也在降低，密堆积结构在增长直至整个颗粒床。但此时的空穴率不会变为 0，因为颗粒床中还存有少量的点缺陷。在实验中，当颗粒的六角密堆积排列从下向上，从外向内拓展过程中，对流现象只存在上部的无序排列区域；在已形成规则排列的区域，因为空穴的缺乏颗粒几乎无相对运动。

## 2.6 本章小结

本章简述了有关颗粒物质在振动情况下，对流运动和颗粒振动分离效应的相关研究情况以及‘巴西果’分离效应的两种解释。在我们实验中，通过对直径分别为 1.00mm、0.70mm、0.50mm 的颗粒体系进行研究，得出了在窄振动颗粒体系的实验系统中，对流运动是产生‘巴西果’分离效应的主要机制。通过对实验现象的分析，观察了颗粒体系由对流态向无对流态的转变过程。分析得出空穴率与对流之间存有一定的因果关系。

## 第3章 ‘巴西果’分离效应的影响因素

### 3.1 前言

通过上一章的实验分析,我们得到了这样的结论:在竖直振动下窄圆筒形容器中,对流运动是‘巴西果’分离效应产生的主要机制。在  $d=1.00\pm0.01\text{mm}$  的不锈钢颗粒床中对流运动存在的时间短,几乎不发生颗粒分离现象,而在  $d=0.50\pm0.01\text{mm}$  和  $0.70\pm0.01\text{mm}$  的不锈钢颗粒床中始终存在着对流运动,故研究‘巴西果’分离效应的实验主要在这两种不同的颗粒床中进行,以便进一步探讨影响大颗粒上升时间的因素有哪些。

### 3.2 实验过程

实验装置见图 2-6。 $d=0.50\text{mm}$ 和 $d=0.70\text{mm}$ 的颗粒体系在竖直振动下始终存在着对流运动——常规对流运动,而且对流速度随 $\Gamma$ 的增加而增加。在这两种颗粒床中始终存在着闯入的大颗粒从容器底上升至颗粒床上表面的‘巴西果’分离效应,而且分离时间随 $\Gamma$ 的增加而减小。

在本章的实验中,我们用于盛装颗粒物质的容器是底部由铝合金构成的,四周是竖直的圆筒形玻璃器壁,而且容器的横向尺寸较小。采取此种容器是有原因的,最近实验研究表明:采用横向尺寸较小的容器可以抑制多组对流卷的产生及堆起的出现<sup>[45]</sup>。所以在我们下面即将进行的实验中,竖直的圆筒形容器内,颗粒物质只会产生中间向上至颗粒床上表面、四周沿器壁向下至容器底形成循环运动的对流卷,这种情况的对流运动较为简单更易于分析研究。同时,尺寸较小的容器也有利于对不可控因素的研究,如温度、湿度,这是因为在窄容器内它们对大颗粒上升时间的影响较为明显。

为了减小因仪器内部的稳定性而导致的误差,每次采集数据前要对所有仪器进行预热 15—20 分钟左右。实验中,还采用加湿器来加湿空气以减少静电作用。实验过程中,颗粒间、颗粒与容器壁之间会因强烈碰撞、摩擦产生杂质,使得颗粒外表面和容器内壁有污渍积累,故每一组实验完成后,均用酒精和脱脂棉进行清洗。

在此实验中,同样为了减少影响因素,颗粒床和大颗粒都选用了同材质的(不锈钢)。这样它们就具有相同的密度和物理特性。

在本章实验中我们采用了两个内径  $D$  分别为 14.50mm 和 15.02mm 的圆

筒形玻璃容器，颗粒装在玻璃容器里。实验中采用了直径分别为 2.00mm、3.00mm、4.00mm、5.00mm、6.00mm、6.34mm、8.00mm、9.00mm 八个大不锈钢圆球。颗粒床分别由直径为  $0.70 \pm 0.01\text{mm}$  和  $0.50 \pm 0.01\text{mm}$  的小不锈钢圆珠组成。实验过程是先把大颗粒放入容器的底部中间位置，再通过玻璃漏斗将小颗粒倒入容器内，每一次都确保颗粒填充至同一高度。作为控制参量，振动加速度通常与重力加速度  $g$  约化，表示为约化加速度  $\Gamma = A\omega^2 / g = A(2\pi f)^2 / g$ ，其中  $\omega$ 、 $f$  和  $A$  分别是外加振动的角加速度、振动频率和振幅。在振动频率  $f$  不变的情况下，每一个电压对应于一个  $\Gamma$  值。用秒表记录每一个  $\Gamma$  下大颗粒从底部运动到露出颗粒床表面时所用的时间，每一个时间重复测量 10 次，最后得出的数据为 10 次测量的平均值。振动频率的变化范围是 40-65Hz。由于频率较高时，振动加速度过大（电压太大）会损坏激荡器，故在实验中信号发生器的  $\Gamma = A\omega^2 / g = A(2\pi f)^2 / g$  电压最大值加至 5.7v 为止，得到的约化加速度的取值范围为  $1.0 < \Gamma < 11$ 。

### 3.3 实验结果与数据分析

#### 3.3.1 振动加速度的影响

振动加速度在‘巴西果’分离效应中起着至关重要的作用，从实验现象中我们可以看出对流运动随着振动加速度的增加而变得强烈，大颗粒的上升时间也越来越短。图 3-1 和图 3-2 都是在  $d=0.70\text{mm}$  的颗粒体系中测得的实验数据曲线，其中容器的内径为 14.50mm，不含大颗粒时的厚度  $H$  为 33.10mm（此两图中的部分数据为彭培耀同学测定）。在图 3-1 中，大颗粒的尺寸大小保持不变  $D=5.00\text{mm}$ ，振动频率  $f$  的取值在 40-65Hz 之间变化，通过振动频率的改变来探究振动加速度对大颗粒上升时间的影响。图 3-2 中的实验曲线则是保持振动频率  $f$  为常量 60Hz，通过改变大颗粒的尺寸来观测大颗粒上升时间的变化，大颗粒的尺寸  $D$  变化范围为 2.00-9.00mm。从图 3-1 与图 3-2 可看出，约化加速度在 2-4 之间时，曲线出现转折，为了更明晰的反应过渡情况，我们将此处放大置于各自图中。

从图 3-1 和图 3-2 中我们可以看出大颗粒上升时间与振动加速度之间的  $\Gamma$ - $\tau$  的关系曲线的走向基本一致。这说明：在‘巴西果’分离过程中振动加速度起着决定性的作用。大颗粒上升的时间  $\tau$  随振动加速度  $\Gamma$  的增加而减小。曲线上存在一个转折点，约在 3 附近。当  $\Gamma < 3$  时，大颗粒上升至顶部的时间随约化加速度  $\Gamma$  的增加而迅速减小，尤其是在  $\Gamma=2$  附近几乎成直线下降。这

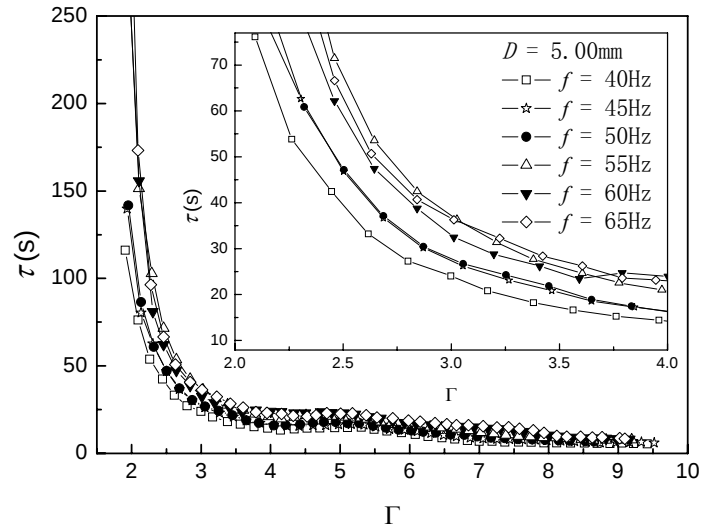


图 3-1 振动加速度对大颗粒上升时间的影响 ( $D=5\text{mm}$ )

Figure3-1 Influences of acceleration on intruder rising time

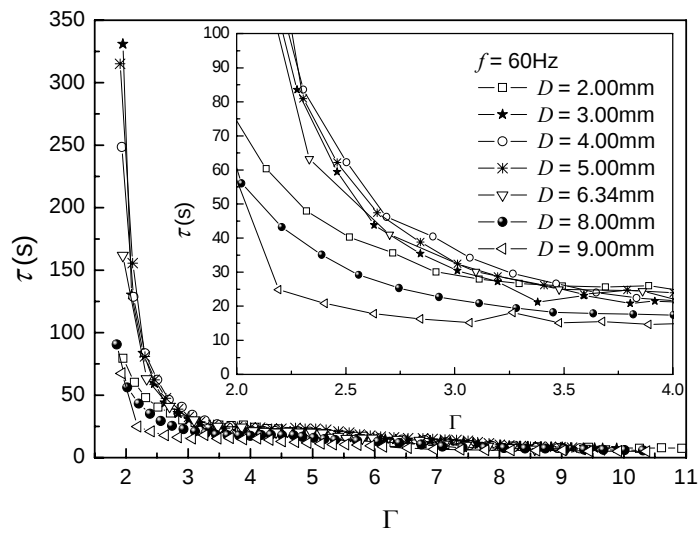


图 3-2 振动加速度对大颗粒上升时间的影响 ( $f=60\text{Hz}$ )

Figure3-2 Influences of acceleration on intruder rising time

与实验现象中观察到的对流运动区域扩充到整个颗粒床时的约化加速度值相一致。虽然整个颗粒床都在作对流运动，但对流运动不稳定。直至  $\Gamma$  值接近于 3 后，对流运动才稳定下来。在图 3-1 和图 3-2 中也可看出，当  $\Gamma > 3$  后，大颗粒的上升时间随  $\Gamma$  的增加而减小得比较慢，这是因为对流运动稳定。

我们又针对  $d=0.50\text{mm}$  的颗粒体系做了一组实验，其中容器内径为  $15.02\text{mm}$ ，填充高度为  $46.92\text{mm}$ ，频率为  $60\text{Hz}$ ，大颗粒尺寸分别为  $2.00\text{mm}$ 、 $3.14\text{mm}$ 、 $5.00\text{mm}$ 、 $6.02\text{mm}$ 、 $9.50\text{mm}$ 。得出针对不同尺寸的大颗粒，大颗粒上升时间与振动加速度之间的关系曲线，见图 3-3。

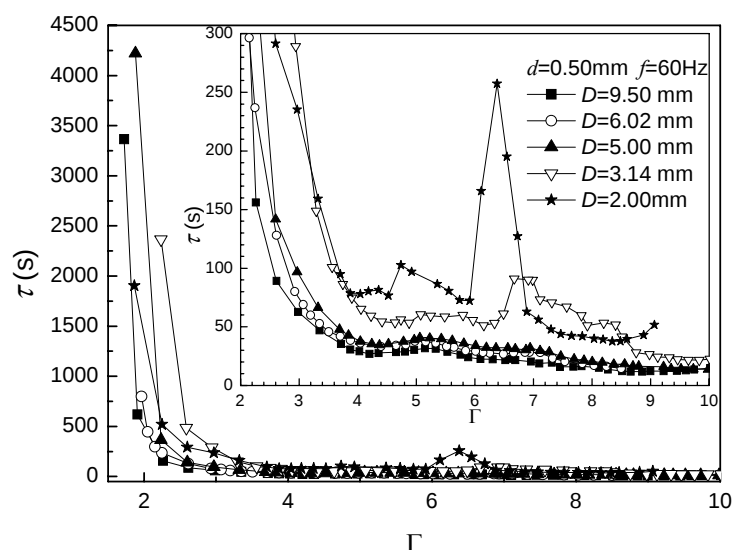


图 3-3 振动加速度对大颗粒上升时间的影响 ( $d=0.50\text{mm}$ ,  $f=60\text{Hz}$ )

Figure3-3 Influences of acceleration on intruder rising time

从图 3-3 中，我们也可以看出振动加速度对大颗粒上升时间的影响与  $0.70\text{mm}$  的颗粒床中的情况是一致的。从图 3-1、图 3-2、图 3-3 中，会发现大颗粒都是在振动加速度超过  $1.5g$  之后才开始有上升运动。这与实验现象中观察到的颗粒床中上部分区域存有对流运动的振动加速度值相一致。

### 3.3.2 振动频率的影响

频率的快慢对大颗粒上升的快慢也是有影响的，我们将图 3-1 局部扩大

得到图 3-4。在图 3-4 中，我们可以清晰地看到大颗粒的上升时间随振动频率的增加而增加。振动频率和对流速度成反比。而且  $\Gamma > 4$  后，曲线有些地方大颗粒的上升时间有些微的增加（如  $\Gamma = 5$  时），这与倍周期运动有关。

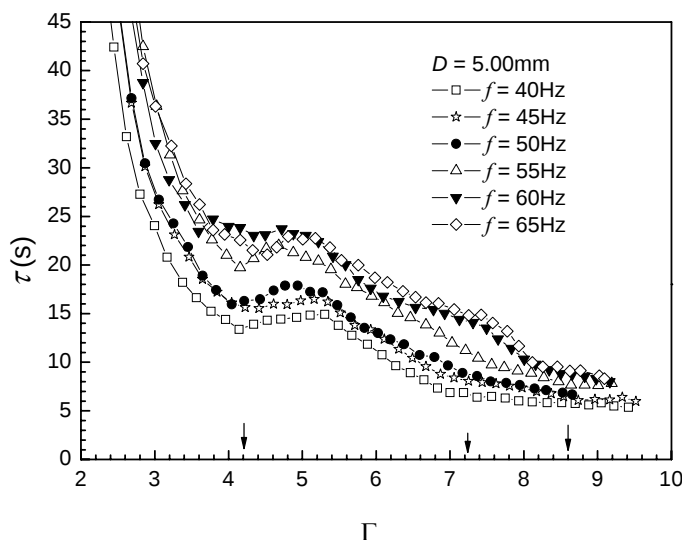


图 3-4 频率对大颗粒上升时间的影响

Figure3-4 Influences of frequency on intruder rising time

### 3.3.3 大颗粒尺寸的影响

2005年，彭亚晶<sup>[44]</sup>通过分析横向尺寸较大的圆筒形玻璃容器（内径为 39.2mm）内陶瓷颗粒床中不同直径  $D$  的大陶瓷颗粒上升时间的实验数据曲线得出：在高振动加速度范围内和低振动加速度范围内，分别有两种机制导致‘巴西果’分离；在低  $\Gamma$  范围内，大颗粒上升时间受其直径的影响较小，对流机制对振动分离起主要作用；在高  $\Gamma$  范围内，大颗粒直径的尺寸对大颗粒上升时间的影响很大，大颗粒的直径大小直接影响着振动中颗粒间的填充几率，故几何填充机制起决定作用。然而我们在上一章中已经得出在窄振动颗粒体系中对流运动是‘巴西果’分离效应的主要机制，那么我们通过实验数据来分析在此状态下闯入大颗粒的直径大小对‘巴西果’分离效应有怎样影响。

将图 3-2 局部放大得到图 3-5。从图 3-5 中可发现  $D = 5.00\text{mm}$ 、 $6.34\text{mm}$ 、

8.00mm、9.00mm的曲线有明显的规律：大颗粒的尺寸越大，上升的时间越短。而 $D=2.00\text{mm}$ 、 $3.00\text{mm}$ 、 $4.00\text{mm}$ 的曲线（无论是在低振动加速度下还是在高振动加速度范围内）始终交织在一起。依据knight的对流机制解释，在容器的内部存有一颗颗粒上升运动区域，其是以容器中心轴为中心形成圆筒形的颗粒向上流动区域，此区域外是颗粒向下运动的区域。 $D < 5.00\text{mm}$ 的情况下，大颗粒的尺寸对大颗粒的上升时间没有影响，可知对流的流速不变。说明本系统中上升区域的横向尺寸至少要大于 $5.00\text{mm}$ ，另外所有的大颗粒上升至颗粒床表面随小颗粒运动到容器器壁后停留在上表面，并不再跟随小颗粒沿器壁向下运动（包括直径 $d=2.00\text{mm}$ 的大颗粒），由此可知，器壁附近的向下运动的横向区域尺寸要小于 $2.00\text{mm}$ 。

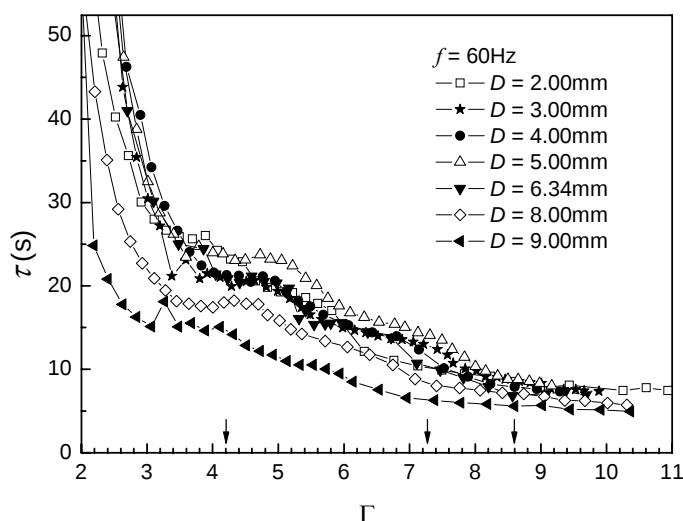


图3-5 大颗粒直径对大颗粒上升时间的影响( $d=0.70\text{mm}$ )

Figure3-5 Influences of diameter of intruder on intruder rising time

为了进一步证实这一点我们又做了一组实验：容器直径为 $15.02\text{mm}$ 的圆筒形玻璃容器，颗粒床尺寸为 $0.50 \pm 0.01\text{mm}$ 的不锈钢圆珠，大颗粒尺寸分别为 $9.50\text{mm}$ 、 $6.02\text{mm}$ 、 $5.00\text{mm}$ 、 $3.14\text{mm}$ 、 $2.00\text{mm}$ 不锈钢圆球，填充高度为 $46.92\text{mm}$ 。这次实验与上组实验相比，除容器仍是圆筒形玻璃容器和颗粒的材质还是不锈钢外，其它条件均在小范围内有所改动，但得到的结论却是一样的。数据曲线见图3-3。这组实验我们着重进行了低振动加速度下的研究。

从中我们可知在约化加速度为2时分离还是会发生的，只是大颗粒上升的很慢。这与实验现象中观察到的对流运动充满整个颗粒床时的振动加速度相对应。在 $\Gamma < 2$ 的情况下从器壁观察到的实验现象是颗粒床上部分在向下运动，下部分颗粒尤其是靠近底部的仍维持原静止时的位置状态。但结果是仍产生了分离，尽管分离时间很长，有的长达一个小时。这说明颗粒体系内部已经形成了深至底层的对流循环运动，在颗粒床的径向上对流区域是随振动加速度的增加而增加的。低振动加速度下大颗粒上升时间长也可能是由于内部产生对流运动，但由于外层的颗粒仍处于静止状态，则运动的颗粒与静止的颗粒不断碰撞促使能量损失，流动速度减慢，在实验上表现为闯入的大颗粒的上升时间非常长。

在我们的实验系统中，通过上面的实验数据和上一章的实验现象，我们可以得知对流运动在整个‘巴西果’分离过程中起着主导作用，是产生‘巴西果’分离的主要机制。那么，在此系统中，振动加速度和振动频率对大颗粒上升时间的影响间接的反映了对对流运动的影响：振动加速度越大促使对流运动的速度越快，在对流运动稳定后，振动加速度的影响有所减小，可见振动加速度是促使对流开始运动的主因。振动频率越快，对流运动却越缓慢。

### 3.3.4 颗粒床倍周期运动的影响

$\Gamma$  取得某些值时，大颗粒的上升时间有所波动，而且大颗粒的尺寸越小，波动越明显。波动点与实验中观测到的颗粒床的倍周期运动相吻合。波动的地方大部分是在倍周期分岔点附近，可见，倍周期分岔运动对对流的流速有较大影响。倍周期运动增大了大颗粒的上升时间，对对流有抑制的作用。

在  $d = 0.70 \pm 0.01\text{mm}$  的颗粒床中（容器内径为  $14.5\text{mm}$ ），我们研究了振动频率  $f$  和大颗粒的尺寸  $D$  对分离时间  $\tau$  的影响。图 3-4 给出了不同频率下，分离时间随  $\Gamma$  的变化，其中， $D = 5.00\text{mm}$ ， $H = 33.10\text{mm}$ 。图 3-5 给出了直径  $D$  不同时，分离时间随  $\Gamma$  的变化，其中， $f = 60\text{Hz}$ ， $H = 33.10\text{mm}$ 。图中的向下箭头依次表示颗粒床进入二倍周期、四倍周期、三倍周期运动的临界点（实验值）。

图 3-4 和图 3-5 中，可以看出分离过程中在二倍周期和四倍周期分岔点附近， $\Gamma - \tau$  的曲线略有突起，分离时间  $\tau$  有所增大。频率  $f$  对这种增大的影响不大，而大颗粒的直径  $D$  对这种时间增大有规律性的影响， $D$  越大时间增大的幅度越小，倍周期运动对大颗粒上升的影响有所减弱。这两幅图说明了倍周期运动使得对流卷的流速变慢。

### 3.3.5 周围空气湿度和温度的影响

在前面的实验过程中，我们尽量通过各种方法来增加实验台周围的空气湿度，湿度越大颗粒床负荷的电荷量越小，颗粒间的静电力作用也就越小，小至可以忽略不计。为了使实验过程中的空气湿度基本保持不变，我们通过空气加湿器来进行调节。在已有的文献中有关于空气湿度对颗粒混合物振动分离的影响研究<sup>[46]</sup>，但是Rhodes等人做的实验是在对流运动可忽略的实验设施下进行的。在这里我们试图观察在对流运动是‘巴西果’分离效应形成的主要机制的情况下，空气湿度和温度对大颗粒上升时间的影响效果。

在颗粒床尺寸  $d=0.50\pm0.01\text{mm}$ 、大颗粒尺寸  $D=6.02\text{mm}$ 、容器直径为  $15.02\text{mm}$ 、振动频率为  $60\text{Hz}$  的条件下观测大颗粒的上升时间。在此实验中，观测空气湿度对大颗粒上升时间的影响时，我们未采取任何措施，空气湿度为大气湿度，我们用相对湿度  $r. h.$  (relative humidity) 来表示。图 3-6 中的实验曲线是空气温度相近的情况下，得到的空气湿度对大颗粒上升时间的影响，这组实验历经了三个月；图 3-7 中的实验曲线是空气湿度相近的情况下，得到的空气温度对大颗粒上升时间的影响，这组实验是在一个月完成的。

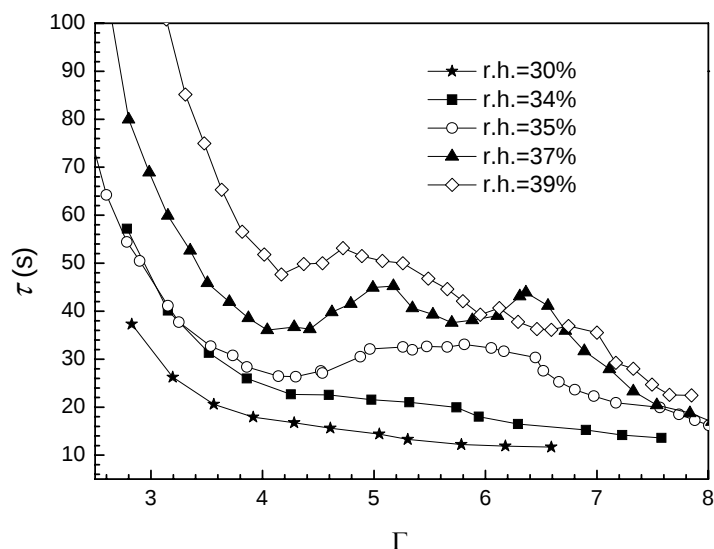


图 3-6 空气湿度对大颗粒上升时间的影响

Figure3-6 Effect of relative humidity on intruder rising time

由图 3-6 可以发现,虽然曲线间有所交错,但整体来看还是有规律性的:随着大气湿度的增加,大颗粒的上升时间也在增加,说明颗粒体系内的对流运动速度在减慢。而且相对湿度越高,倍周期分岔运动对大颗粒上升时间的影响也越明显。实验台周围的温度对大颗粒的上升时间也是有一定影响的,在图 3-7 中,虽然曲线之间也是有所交错,但温度的影响规律还是有所体现的:温度的升高缩短了大颗粒的上升时间、促使对流循环运动加速;温度越高,倍周期分岔运动对大颗粒上升时间的影响越不明显。

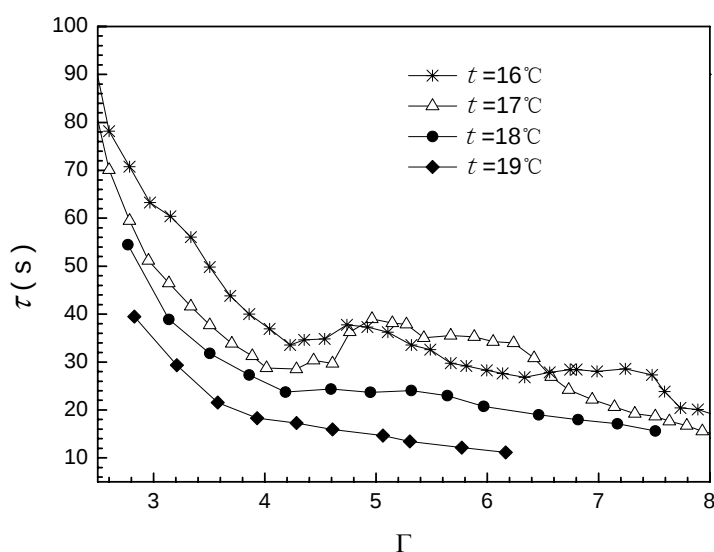


图 3-7 温度对大颗粒上升时间的影响

Figure3-7 Effect of temperature on intruder rising time

当振动频率、大小颗粒的尺寸、颗粒的材质、颗粒填充高度、所用于盛装颗粒物质的容器都未改变时,而且实验台周围的空气相对湿度和温度也都相同时,不同的时间段内测得的实验数据曲线也不是完全一致的。在图 3-8 中有四条实验曲线,实验台周围的温度是一样的,都是  $18^\circ\text{C}$ ,但空气相对湿度是不一样的,其中两条曲线的空气相对湿度是 34%,另两条曲线则是 41%。这四条实验曲线的数据是连续测量并且在 5 天内完成的。从此图中我们不但能够得出空气相对湿度对大颗粒上升时间的影响——空气相对湿度的升高延长了大颗粒的上升时间;还可以得出在温度和相对湿度都一致的情况下,曲线的整体走势虽然一样,但却不能很好的重合,尤其是在振动加速度较高的

情况下，曲线间有交叉，交叉点在振动加速度为  $5.5g$  附近。这可能是由于实验装置内部的不稳定性造成的。但对于交叉点在振动加速度为  $5.5g$  附近的原因，我们尚且不知还有待进一步研究。

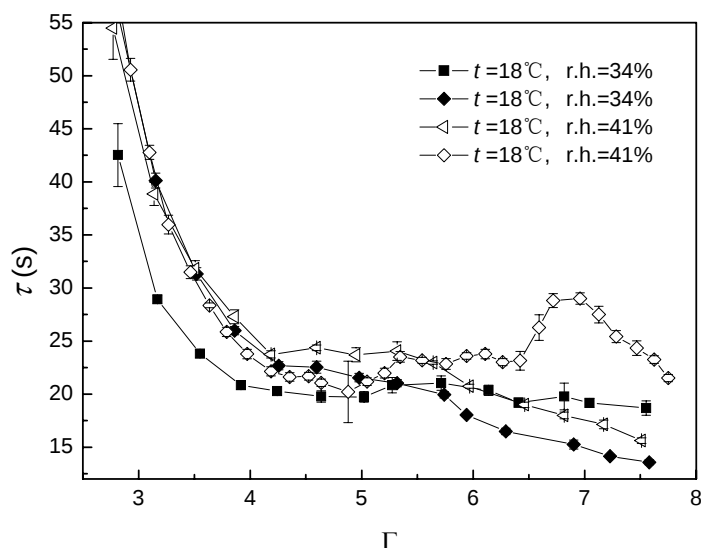


图 3-8 温度为  $18^\circ\text{C}$ ，相对湿度为 34%和 41%时大颗粒上升的时间曲线  
Figure3-8 Effect of temperature and relative humidity on intruder rising time  
( $t=18^\circ\text{C}$ , r. h.=34%,41%)

实验系统内部的不稳定因素对实验数据的影响是微乎其微的。但是同样的实验，在实验条件均一致的情况下，间隔较长一段时间后再重新测量实验数据，所得的实验曲线就会存有较大的差距。

图 3-9 中两条数据曲线的实验条件是完全相同的，只是这两条实验曲线的实验时间间隔了一个月之久。从此图中，我们可以看出这两条数据曲线没有重合之处，而且在相同的振动加速度下，大颗粒上升时间的差值很大，特别是在低振动加速度范围内大颗粒上升时间会差出一倍之多。造成这种情况的因素很多，由于实验的长时间的进行，颗粒间以及颗粒与器壁间的强烈碰撞和摩擦使得颗粒表面及容器内表面都很脏，有时长期振动后会观察到透明器壁明显变暗；尽管在不做实验时，将颗粒放入密闭的容器中进行储存，但是由于实验中盛装颗粒的容器是半开口的，而且每次实验的持续时间很长，所以空气中的灰尘也会使颗粒变得不干净；正是因为这些原因，我们要定期

清洗容器和颗粒物质。清洗时为了要他们尽快变干以免杂质落入，每次都用酒精进行清洗；为了使颗粒的干燥程度高些，颗粒放在阴凉处干燥达一天之久。但清洗程度和干燥程度还是有所差异的，这些差异也会使得每次实验中颗粒物质不可能完全一样，从而使得实验数据有所偏差。

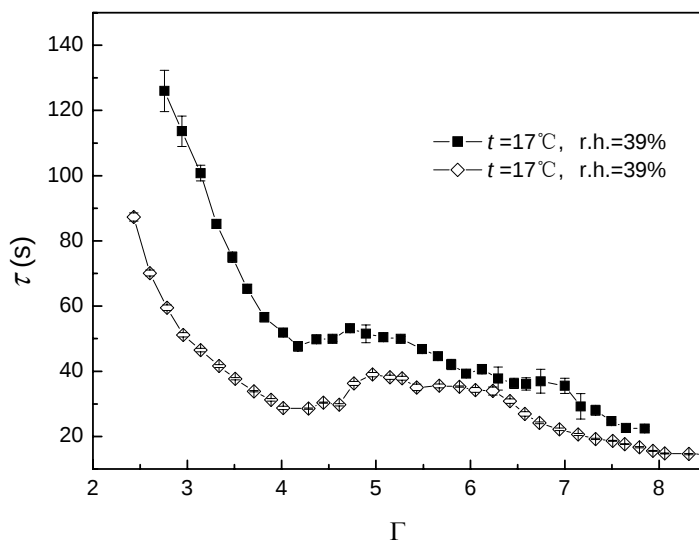


图 3-9 不同日期测的同温度同湿度下的大颗粒上升时间曲线

Figure3-9 The graph of intruder rising time on the same temperature and relative humidity in different days

在图 3-10 中，空气湿度的影响规律再一次体现，但温度的影响效应不明显。相对湿度为 37%、温度分别为  $20^\circ\text{C}$  和  $16^\circ\text{C}$  的两条曲线测量时间间隔了 3 个月，可能正是由于颗粒的清洁程度和干燥程度的不同使得温度的影响规律不明显。可见空气湿度对大颗粒上升时间的影响要强于温度的影响。

空气的温度和湿度是相互影响的，而且每次实验的持续时间很长，难以控制空气温度和湿度为某一固定值，所以图 3-6 与图 3-7 的实验数据曲线只是粗线条的反应了空气湿度和温度对大颗粒上升时间的影响规律，并不精确。虽然颗粒体系周围的环境以及颗粒自身的清洁程度等都会对大颗粒的上升时间产生一定的影响，但影响的程度都很低，因为振动加速度、振动频率、大颗粒尺寸的影响规律非常明显，没有因为这些因素而改变。

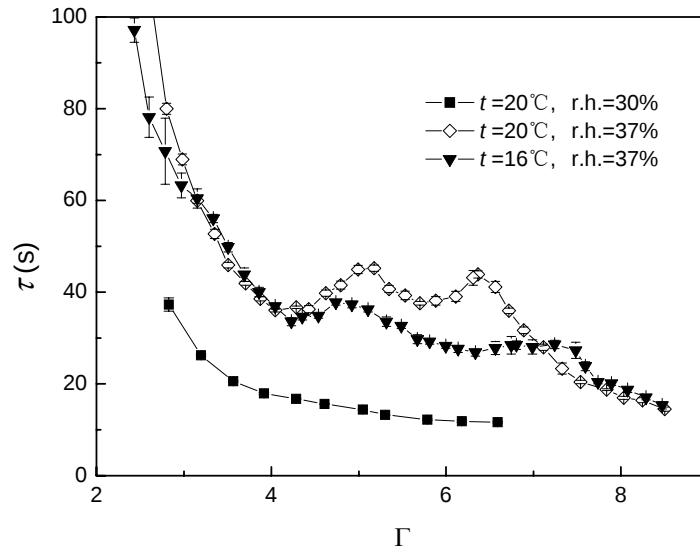


图 3-10 温度为 20℃，相对湿度为 30%和 37%时大颗粒上升的时间曲线

Figure3-10 Effect of temperature and relative humidity on intruder rising time  
( $t=20^\circ\text{C}$ , r. h.=30%, 37%)

### 3.4 本章小结

实验表明，窄容器不锈钢颗粒床中对流运动是产生‘巴西果’分离效应的主要机制。外加振动的振动加速度是对流运动产生的决定性影响因素。振动加速度越大，对流的运动速度越快。颗粒床受迫振动的周期也影响着对流的运动，周期越短，大颗粒上升的时间就越长。大颗粒尺寸对对流运动的影响验证了 Knight 的理论：对流机制产生‘巴西果’分离效应，上升对流的径向区域要大于下降对流区域。从我们的实验中可看出，温度和相对湿度也都对对流运动产生一定影响。

## 第4章 完全非弹性蹦球模型

### 4.1 前言

在上一章中，我们得到了振动加速度、频率、大颗粒尺寸、倍周期运动等因素对大颗粒上升时间的影响关系。本章中我们利用完全非弹性蹦球模型对这些影响给出一定的理论解释。

### 4.2 倍周期运动

分岔现象是非线性系统中所特有的一种非常重要的性质。分岔现象是与系统的稳定性密切相关的。分岔的出现表示系统此时是结构不稳定的，或者说，结构不稳定意味着出现分岔。在一个非线性系统中分岔常常不会只出现一次，会随着参数取值的不断改变而出现一系列的分岔点，这就是所谓的逐次分岔。而有实际意义的逐次分岔应是当系统从稳定态经过第一次分岔到达某一个稳定的分岔支后由于参数值的继续变化系统可能会出现第二次分岔（其形式与第一次的分岔形式一样）。如此下去，便出现了许多文献中提到的所谓级联现象<sup>[47]</sup>。

颗粒物质是由大量的固体小颗粒所构成的离散体系，具有很强的非线性特征。在此体系中也能观察到分岔现象。对颗粒物质施加竖直方向上的周期性振动时，随着振动加速度的递增，会发现颗粒床中颗粒对容器底的压力曲线不是线性的，而是倍周期分岔（有的文献中又称之为分频）和混沌运动交替出现。振动颗粒床中的倍周期运动也有多种表现形式<sup>[48,49]</sup>：当颗粒层较少时会出现 $2p$ ， $4p$ ， $3p$ 及 $6p$ （ $p$ 为施加给颗粒床的简谐振动周期）的表面驻波；颗粒列中2倍周期和4倍周期运动及横向振动颗粒床中颗粒脱离侧壁时间的2倍周期和4倍周期分岔等等。

本实验室通过大量的实验观察研究（实验装置见图2-6），发现当振动频率处于25赫兹至75赫兹之间时（ $25\text{ Hz} \leq f \leq 75\text{ Hz}$ ），分岔点与频率的大小、颗粒的尺寸及颗粒的材质的关系不明显。

实验中，振动加速度 $\Gamma$ 由1开始增加，在逐渐增加的过程中，会发现压力信号中除了来自容器贡献的简谐成分外，还有一些源于颗粒对容器底部的冲击而形成的脉冲信号。在本实验中因为容器与压力传感器是刚性连接的，通过快速傅里叶变换（FFT）滤波技术可以将来自容器贡献的谐波成分滤掉，故在图2-6的实验装置图中的示波器上只显示了颗粒体系对容器底部产生的

冲击信号。当 $\Gamma$ 稍大于1时，可观察到示波器上的脉冲强度（峰高）随 $\Gamma$ 的增加而逐渐增大，而且脉冲的重复周期与振动周期相同。继续增加 $\Gamma$ ，观察到脉冲信号会变成一高一低相间隔的，而且相同高度的脉冲信号的重复周期是外加振动周期的2倍，说明此时已发生了2倍周期分岔。之后随着 $\Gamma$ 的继续增大，还会发现4倍周期分岔，然后是混沌、3倍周期分岔、6倍周期分岔、混沌等等。

### 4.3 完全非弹性蹦球模型的建立和解析

有关倍周期分岔的产生原因和在大颗粒上升时间中的影响，我们利用完全非弹性蹦球模型来进行讨论。

颗粒床与容器底之间是完全非弹性碰撞的，碰撞后，颗粒床的原有速度消失，与容器底保持相同的速度。

在我们这里，台面以简谐振动的方式振动。台面的位移表示为：

$$x(t) = A \sin \omega t \quad \text{其中 } \omega = 2\pi f \quad (4-1)$$

$$t \text{ 时刻台面的速度为: } \dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t \quad (4-2)$$

$$t \text{ 时刻台面的加速度为: } \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t \quad (4-3)$$

当台面向上的加速度 $\ddot{x}(t)$ 的大小等于重力加速度时，颗粒床与容器底之间的相互作用力为零，颗粒床开始脱离容器底，因为容器固定在台面上和振动台一起运动。

$$A\omega^2 \sin(\omega t) = g \quad (4-4)$$

$$\text{又有} \quad \Gamma = A\omega^2 / g \quad (4-5)$$

$$\text{故,} \quad \Gamma \sin(\omega t) = 1 \quad (4-6)$$

(4-6) 式是颗粒床的起跳条件，即，在 $t$ 时刻，若 $\sin \omega t \geq 1/\Gamma$ 得到满足，颗粒床会立刻跳起，若起跳条件未能满足，它将停留在台面上与台面一起运动，直到下一次起跳条件得到满足再次跳起。这样颗粒床有可能在连续跳跃几次之后，停下来，再连续跳跃。正是由于有起跳条件得不到满足的情况存在，从而产生了倍周期运动。

规定 $t_0$ 时刻颗粒床第一次脱离容器底， $t_1$ 时刻颗粒床再次落到容器底，则颗粒床相对容器底的入射速度 $u$ （ $u$ 已被 $gT$ 约化）为，

$$u = A\omega \cos \omega t_0 - A\omega \cos \omega t_1 - g(t_1 - t_0) \quad (4-7)$$

在此期间颗粒床的运动是竖直上抛运动。

$$s(t_1 - t_0) = A\omega \cos(\omega t_0)(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2 \quad (4-8)$$

若颗粒床在  $\sin \omega t \geq 1/\Gamma$  未满足之前, 已经连续跳跃了  $k$  次, 则可得到下列的递推关系:

$$u = A\omega \cos \omega t_k - (A\omega \cos \omega t_{k-1} - g(t_k - t_{k-1})) \quad (4-9)$$

$$\Gamma g \sin \omega t_{k-1} + \Gamma g \omega(t_k - t_{k-1}) \cos \omega t_{k-1} - \frac{1}{2}\omega^2 g(t_k - t_{k-1})^2 = \Gamma g \sin \omega t_k \quad (4-10)$$

球与台面的碰撞是完全非弹性的, 因此球对台面的冲击强度可通过球相对台面的入射速度来计算。计算得出分岔点与实验值基本一致。表4-1为颗粒床分别为  $0.70 \pm 0.01 \text{mm}$  和  $0.50 \pm 0.01 \text{mm}$  的分岔点的理论值和实验值。

表4-1 倍周期分岔点的理论值和实验值的比较

Table4-1 Compared between theory values and experiment values

|            | 理论值       | 实验值 (颗粒床为不锈钢球)              |                             |
|------------|-----------|-----------------------------|-----------------------------|
|            |           | $d=0.50 \pm 0.01 \text{mm}$ | $d=0.70 \pm 0.01 \text{mm}$ |
| $\Gamma_2$ | 3.72      | $4.36 \pm 0.10$             | $4.20 \pm 0.03$             |
| $\Gamma_4$ | 6.69      | $6.30 \pm 0.10$             | $7.25 \pm 0.12$             |
| 混沌         | 7.23-7.25 | $8.43 \pm 0.08$             | $8.61 \pm 0.10$             |
| $\Gamma_3$ | 7.44      | $9.31 \pm 0.13$             | $9.42 \pm 0.12$             |
| $\Gamma_6$ | 9.63      | $10.61 \pm 0.09$            | $10.97 \pm 0.12$            |

由 4-10 式可以计算出颗粒床从  $t_0$  时刻起每次的碰撞时刻和运动轨迹。在  $\Gamma$  由小到大的过程中, 颗粒床先后经历了一倍周期运动、连续两跳的二倍周期运动、一跳的二倍周期运动、连续两跳的四倍周期运动、连续两跳的三倍周期运动、一跳的三倍周期运动等等。在实验中, 四倍周期分岔和三倍周期分岔之间有一混沌区 (在此区内能看到各种倍周期运动, 但持续时间都很短), 而且二倍周期运动和四倍周期运动对分离时间的影响较为明显。故我们主要看二倍周期和四倍周期的影响。以二倍周期分岔为例。

在二倍周期分岔运动中, 随着振动加速度的递增, 颗粒床开始从连续两次跳跃后进入吸收期逐步向跳跃一次就进入吸收期过渡。在过渡期振动加速度不断增加的过程中, 颗粒床的第一次自由飞行时间不断增加, 再次碰撞时,

振动台的速度由向上运动且在逐渐减小至 0 后开始向下递增。颗粒床的第二次起跳速度与振动台的速度相同，故二倍周期运动中存有一段区域，在此区域颗粒床向下运动。这种向下运动对对流的流速产生一定的减慢效果，故可得到实验当中二倍周期附近大颗粒的上升时间会有所增加。虽然颗粒床的起跳速度有向下且随着振动加速度的增加而越来越大，但其对应的自由飞行的时间却越来越小，因此对对流的影响是有限度的。

四倍周期运动对对流运动产生影响的理论分析与二倍周期运动的相同。

有实验报道<sup>[50~52]</sup>：颗粒床中心轴附近的对流速度与振动台面的振动速度成正比关系。假定颗粒床中轴附近的颗粒向上运动的速度正比于颗粒床脱离台面做自由飞行时台面的速度，并且将整个颗粒床看成一个完全非弹性蹦球，则对流速度 $J$ 可以表示为，

$$J = K_1 v \quad (4-11)$$

其中， $K_1$ 为一与速度无关的常数。 $v$ 为颗粒床脱离台面瞬间的起跳速度，其大小由如下方法确定：

$t_0$  时刻  $\sin \omega t = 1/\Gamma$  时，颗粒床跃起。此刻，颗粒床的起跳速度与台面的相同，为：

$$v = \dot{x}(t)|_{t=t_0} = A\omega \cos(\omega t_0) = \frac{g}{\omega} \sqrt{\Gamma^2 - 1} \quad (4-12)$$

把颗粒床作为抛体并忽略台面的位移，则颗粒床的自由飞行的时间近似为，

$$t = \frac{2v}{g} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\Gamma^2 - 1} \quad (4-13)$$

假定大颗粒的分离速度正比于对流速度，而且分离只发生在颗粒床自由飞行期间，则大颗粒的位移为，

$$S = K_2 J t \quad (4-14)$$

其中， $K_2$ 为比例系数。一个振动周期内大颗粒的平均上升速率为  $V = S/T$ ， $T$  为振动周期。分离时间则为，

$$\tau = \frac{H}{V} = K \frac{2\pi^2 H f}{g(\Gamma^2 - 1)} \quad (4-15)$$

其中,  $f=1/T$ 为台面的振动频率,  $K=K_1K_2$ 是一个与大小颗粒尺寸比、密度比、温度、湿度等参量有关的一个常数。由(4-15)式可以看出, 分离时间与 $H$ ,  $f$ 成正比, 与 $\Gamma^2$ 成反比, 与实验结果基本一致。

#### 4.4 本章小结

对盛装在窄圆筒形容器中 0.70mm 和 0.50mm 的颗粒床, 我们研究了它们发生对流运动的情况, 发现它们之中存在着二倍周期运动和四倍周期运动, 还发现这些倍周期运动对对流的速度起减慢的作用。我们把颗粒床看作一个完全非弹性蹦球来解释实验中观察到的倍周期运动及其对大颗粒上升时间的影响, 我们又通过假定中心轴附近的对流速度与颗粒床脱离容器底后自由飞行的速度成正比来导出影响大颗粒上升时间的其他因素, 得出与实验结果基本一致的结论。

## 结 论

本论文主要研究了竖直振动激励下在窄圆筒形容器中颗粒体系的运动状态。在实验中发现了颗粒的同心壳层六角密堆积排列中的无对流运动状态，而且在此状态下也不发生‘巴西果’分离效应。在此之后我们针对更小的颗粒体系进行实验研究，通过实验发现在更小的颗粒床中存有对流运动和‘巴西果’分离现象，从而得到了对流运动是产生‘巴西果’分离效应的主要机制。进而我们研究对流运动与振动加速度、振动频率、倍周期运动、温度以及大气湿度之间的关系。实验结论如下：

1. 在  $d=1.00\text{mm}$  的颗粒床中，观察到了颗粒由无序排列到有序排列、由有对流运动的状态到无对流运动的状态的过渡，最后整个颗粒床进入聚集态，整体上下运动。对流运动存在的时间很短，在无对流运动的区域不发生‘巴西果’分离现象。但是在  $d=0.70\text{mm}$  和  $d=0.50\text{mm}$  的颗粒体系中都产生了对流运动和‘巴西果’分离现象。对流运动是产生‘巴西果’分离效应的主要机制。
2. 在  $d=0.70\text{mm}$  和  $d=0.50\text{mm}$  的颗粒床中，对流运动始终存在着，即使在振动加速度较大时，颗粒聚集在一起整体运动的情况下，仍能观察到对流运动。在对流运动中振动加速度起着至关重要的作用，对流运动的强度和深度都随着振动加速度的增加而增大。振动频率与对流的速度成反比。大颗粒直径对对流影响的研究，再一次证实了对流运动是产生‘巴西果’分离的主要机制。而且反映了对流上升运动的径向尺寸大于下降运动的径向尺寸，对流上升运动的径向尺寸随振动加速度的增加而增大。另外，颗粒床周围的空气温度和相对湿度也都对对流运动产生一定的影响。
3. 在关于对流运动的影响因素的实验研究中，也观察到了倍周期运动：二倍周期运动、四倍周期运动、混沌、三倍周期运动。而且发现二倍周期分岔和四倍周期分岔对对流运动明显有减慢其速度的影响。通过完全非弹性蹦球模型给出了一定的解释。
4. 将颗粒床视为完全非弹性蹦球，假定容器中心轴的对流速度正比于颗粒床脱离容器底后自由飞行的速度的情况下，得出  $\tau = 2\pi^2 K H f / [g(\Gamma^2 - 1)]$ ，与实验结果相一致。

本论文是在发现了颗粒床中存有无对流运动状态和在此状态下颗粒混合物振动不分离的情形后展开的一系列研究。对对流的影响因素和与倍周期运动之间的关系进行了分析研究，并给出了相应的解释。但这一切实验都是在

窄圆筒形容器中和不锈钢颗粒床中进行的，但在实验条件不同的情况下（如容器的形状、横向尺寸，颗粒的材质等）能否得到同样的实验结果，仍需进一步研究。

## 参考文献

- 1 P. G. de Gennes. Granular Matter: a Tentative View. Rev. Mod. Phys. 1999, 71(2):s374~s382
- 2 申志颖. 颗粒物质的粮仓效应及其颗粒尺寸的关系. 哈尔滨工业大学硕士学位论文. 2001: I ~III, 1~5
- 3 张兴刚, 胡林, 隆正文. 粮仓效应的圆盘堆积模型. 计量物理. 2006, 23(6):642~646
- 4 肖文波, 胡林. 颗粒物质的两个典型效应及其研究现状的分析. 实验物理. 2004, 24(3):44~46
- 5 I. Bratberg, K. J. Maloy and A. Hansen. Validity of the Janssen Law in Narrow Granular Columns. European Physical Journal E. 2005, 18:245~252
- 6 L.Vanel, E. Clement. Pressure Screening and Fluctuations at the Bottom of a Granular Column. Eur Phys J B. 1999, 11:525~533
- 7 孔维姝, 胡林, 吴宇, 王伟明. 颗粒物质中的奇异现象. 大学物理. 2006, 25(11):52~55
- 8 H. M. Jaeger, S. R. Nagel. Granular Solids, Liquids, and Gases. Rev. Mod. Phys. 1996, 68(4):1259~1271
- 9 F. Radjai, et al. Force Distributions in Dense Two-Dimensional Granular Systems. Phys. Rev. Lett. 1996, 77: 274~277
- 10 胡林, 杨平, 徐亭等. 颗粒物质中圆棒受到的静摩擦力. 物理学报. 2003, 52(4):879~882
- 11 肖文波, 胡林, 武玉琴. 颗粒物质中最大静摩擦力随填充高度的变化规律. 摩擦学学报. 2005, 25(2):183~185
- 12 孔维姝, 胡林, 武玉琴, 张兴刚. 不同形状的棒在颗粒物质中受到的静摩擦力. 物理实验. 2006, 26(2):18~21
- 13 胡林, 龙为, 张涛等. 颗粒物质中压力随高度的变化规律. 物理实验. 2002, 22(11):46~48
- 14 孔维姝, 胡林, 杜学能等. 用探测棒研究颗粒堆中的最大静摩擦力. 物理学报. 2007, 56(4):2318~2321
- 15 C. Goldenberg, I. Goldhirsch. Friction Enhances Elasticity in Granular Solids. Nature. 2005, 435(12):188~191

- 16 缪国庆, 隋磊, 魏荣爵. 颗粒物质表面波动的简单模型. 声学技术, 2000, 19(3): 110~111
- 17 F. Melo, P. Umbanhowar and H. L. Swinney. Transition to Parametric Wave Patterns in a Vertically Oscillated Granular Layer. Phys. Rev. Lett. 1994, 72:172~175
- 18 J. R. Bruyn, C. Bizon, M. D. Shattuck, D. Goldman, J. B. Swift, and H. L. Swinney . Continuum-Type Stability Balloon in Oscillated Granular Layers. Phys. Rev. Lett . 1998, 81:1421~1424
- 19 C. Bizon, M. D. Shattuck, J. B. Swift, W. D. McCormick and H. L. Swinney. Patterns in 3D Vertically Oscillated Granular Layers: Simulation and Experiment. Phys. Rev. Lett . 1998, 80(1):57~60
- 20 史庆藩, 阎学群, 厚美瑛, 牛小娟, 陆坤权. 振动混合颗粒形成的反巴西果分层及其相图的实验观测. 科学通报. 2003, 48(4):328~330
- 21 姜泽辉, 陆坤权, 厚美英, 陈唯, 陈相君. 振动颗粒混合物中的三明治式分离. 物理学报. 2003, 52(9):2244~2248
- 22 G . Peng, H. J. Herrmann. Density Waves of Granular Flow in a Pipe Using Lattice-Gas Automata. Phys. Rev. E. 1994, 49:R1796~R1799
- 23 G. Peng, H. J. Herrmann. Density waves and  $1/f$  Density Fluctuations in Granular Flow. Phys. Rev. E. 1995, 51:1745~1756
- 24 A. Nakahara, T. Isoda.  $1/f^\alpha$  Density Fluctuation at the Slugging Transition Point of Granular Flows through a Pipe. Phys. Rev. E. 1997, 55:4264~4273
- 25 O. Moriyama, N. Kuroiwa, M. Matsushita.  $4/3$  Law of Granular Particles Flowing through a Vertical Pipe. Phys. Rev. Lett. 1998, 80:2833~2836
- 26 徐光磊等. 通道宽度和初始流量对颗粒稀疏流-密集流转变临界开口的影响. 物理学报. 2003, 52(4):875~87
- 27 鲍德松等. 平面颗粒流的瓶颈效应及其与速度的关系. 物理学报. 2003, 52(2):401~404
- 28 I .Zuriguel, L. A. Pugnaloni, A .Garcimartin et al. Jamming during the Discharge of Grains from a Silo Described as a Percolating Transition. Phys. Rev. E. 2003, 68:030301
- 29 K. To, P. Y. Lai and H. K. Pak. Jamming of Granular Flow in a Two-Dimensional Hopper. Phys. Rev. Lett. 2001, 86:71~74
- 30 S. S. Hsiau, et al. Convection Cells and Segregation in a Vibrated Granular

- Bed. AIChE. Journal. 2002, 48(10):1430~1438
- 31 J. B. Knight. External Boundaries and Internal Shear Bands in Granular Convection. Phys. Rev. E. 1997, 55(5):6016~6023
- 32 E. L. Grossman. Effects of Container Geometry on Granular Convection. Phys. Rev.E.1998, 56(3):3290~3300
- 33 J. A. C. Gallas, et al. Convection Cell in Vibrating Granular Media. Phys. Rev.Lett.1992, 69(9):1371~1374
- 34 K. M. Aoki, et al. Convective Roll Patterns in Vertically Vibrated Beds of Granulars. Phys. Rev. E. 1996, 54(1):874~883
- 35 Y. H. Taguchi. New Origin of a Convective Motion: Elastically Induced Convection in Granular Materials. Phys. Rev. Lett. 1992, 69(9):1367~1370
- 36 C. R. Wassgren. Vibration of Granular Materials. Dissertation for the Doctor Degree in California Insitute of Technology. 1997:103~104
- 37 A. Garcimartín, et al. Convective Motion in a Vibrated Granular Layer. Phys. Rev. E. 2002, 65:031303
- 38 M. E. Möbius, X. Cheng, G. S. Karczmar, S. R. Nagel and H.M. Jaeger, Intruders in the Dust: Air-Driven Granular Size Separation. Phys. Rev. Lett. 2004, 93:198001
- 39 H. K. Pak, E. V. Doorn, and R. P. Behringer. Effects of Ambient Gases on Granular Materials under Vertical Vibration. Phys. Rev. Lett. 1995, 74: 4643~4646
- 40 M. Medved, D. Dawson, H. M. Jaeger and S. R. Nagel. Convection in Horizontally Vibrated Granular Material. Chaos. 1999, 9(3):691~696
- 41 S. G. K. Tennakoon, L. Kondic, and R. P. Behringer, “Onset of Flow in a Horizontally Vibrated Granular Bed: Convection by Horizontal Shearing,” Europhys. Lett. 1999, 45(4):470~475
- 42 F. Ludewig, N. Vandewalle. Reversing the Brazil Nut Effect. Eur. Phys. J. E. 2005, 18:367~372
- 43 A. Kudrolli. Size Separation in Vibrated Granular Matter. Rep. Prog. Phys. 2004, 67:209~247
- 44 彭亚晶. 振动颗粒物质‘巴西果’分离的研究. 哈尔滨工业大学硕士学位论文. 2005:34, 30
- 45 Z H Jiang, Y Y Wang and J Wu. Subharmonic Motion of Granular Particles

- under Vertical Vibrations. *Europhys. Lett.* 2006, 74(3):417~423
- 46 M. Rhodes, S. Takeuchi, K. Liffman and K. Muniandy. The Role of Interstitial Gas in the Brazil Nut Effect. *Granular Matter.* 2003, 5:107~114
- 47 A. Meththa, J. M. Luck. Novel Temporal Behavior of a Nonlinear Dynamical System: the Completely Inelastic Bouncing Ball. *Phys Rev Lett.* 1990, 65(4):393~395
- 48 姜泽辉, 刘新影, 彭雅晶, 李建伟. 竖直振动颗粒床中的倍周期运动. *物理学报.* 2005, 54(12):5692~5697
- 49 姜泽辉, 李斌, 赵海发, 王运鹰, 戴智斌. 竖直振动颗粒物厚层中冲击力分岔现象. *物理学报.* 2005, 54(3):1273~1277
- 50 D. N. Fernando, C. R. Wassgren. Effects of Vibration Method and Wall Boundaries on Size Segregation in Granular Beds. *Phys. Fluids.* 2003, 15:3458~3467
- 51 C. H. Tai, S. S. Hsiau. Dynamic Behaviors of Powders in a Vibrating Bed. *Powder Technol.* 2004, 139:221~232
- 52 S. S. Hsiau, C. H. Chen. Granular Convection Cells in a Vertical Shaker. *Powder Technol.* 2000, 111:210~217

## 攻读学位期间发表的学术论文

姜泽辉, 王运鹰, 吴晶. 窄振动颗粒床中的运动模式. 物理学报, 2006, 55 卷第 9 期.

Jiang Z H, Wang Y Y and Wu J. Subharmonic Motion of Granular Particles Under Vertical Vibrations. Europhys. Lett. 2006, 74(3): 417-423

姜泽辉, 郑瑞华, 赵海发, 吴晶. 完全非弹性蹦球的动力学行为. 物理学报. 2007, 57 (7): 已录用待发.

## 哈尔滨工业大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的硕士学位论文《振动颗粒的分离与对流》，是本人在导师指导下，在哈尔滨工业大学攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签字：

日期： 年 月 日

## 哈尔滨工业大学硕士学位论文使用授权书

《振动颗粒的分离与对流》系本人在哈尔滨工业大学攻读硕士学位期间在导师指导下完成的硕士学位论文。本论文的研究成果归哈尔滨工业大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解哈尔滨工业大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅，同意学校将论文加入《中国优秀博硕士学位论文全文数据库》和编入《中国知识资源总库》。本人授权哈尔滨工业大学，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

本学位论文属于（请在以上相应方框内打“√”）：

保密□，在 年解密后适用本授权书

不保密□

作者签名：

日期： 年 月 日

导师签名：

日期： 年 月 日

## 致 谢

本论文是在导师姜泽辉教授的精心指导下完成的，我在这里谨向姜泽辉老师表示深深的谢意！姜老师在这两年的时间里，对我学习上耐心细致的教导，生活上无微不至的关怀，做人道理上的谆谆教导，让我不仅在学业上，而且在个人成长上都得到了一个较大的提高，让我莫齿难忘。姜老师渊博的学术知识、敏锐的思维、开阔的视野、严谨的治学态度不断地鞭策和激励着我，令我受益非浅，他谦逊和蔼的品德更是我学习的榜样。

感谢物理系办公室的老师，他们兢兢业业地工作作风和乐于助人的美德是我以后学习的楷模！

感谢 05 硕物理系全体同学及实验室的师弟师妹们对我学习和生活上的帮助！