

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得宁夏大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

研究生签名：



时间：2013 年 6 月 1 日

关于论文使用授权的说明

本人完全了解宁夏大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。同意宁夏大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播学位论文的全部或部分内容。

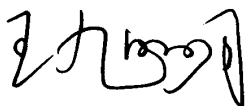
(保密的学位论文在解密后应遵守此协议)

研究生签名：



时间：2013 年 6 月 1 日

导师签名：



时间： 年 月 日

摘要

随着复杂性科学的迅猛发展,对于远离平衡开放系统的研究也逐渐成为复杂科学界的热门话题,这方面理论方法的研究也日益壮大。诸多交叉学科开始将研究对象转向了开放系统模式。而河流网络是典型的开放系统之一,本文借鉴于开放系统的处理理念,试图分析了河网的分布、形态和输运方式几个方面诠释其演化的机制。

1) 河网演化的动力学研究,基于河道的随机延伸,提出了广义的 Langevin 方程,通过构建河网的演化模型,建立 Langevin 方程的确定侵蚀项和随机项,然后将随机的 Langevin 方程转化成 Fokker-Planck 方程,描述河道延伸的转移概率密度。通过对 Fokker-Planck 方程进行傅里叶积分变化,得到其广义指数幂分布,兼有随机性和确定性实际系统中,基本都有类似的分布。 $t \rightarrow 0$ 时,广义指数幂退化为高斯分布, $t \rightarrow t_0$ 时,广义指数幂变形为幂律分布,将这种分布外推至无穷,对应于现今的实测分布。这个时间演化,展示了河网从演化初期到成熟的历史画卷:河长分布从高斯分布到广义的指数幂分布的连续变化揭示了河网从最初的无序幼年期到趋向于有序的发育期最后演化为有序的成熟期。首次描绘了河网标度规律建立之前的景象。

2) 河型转变的协同学理论研究,河型转化的实质是河道为适应其输入的变化而进行的自组织结构调整,是通过水流与河道之间的反馈作用实现的。然而,耦合不仅与水流流态、含沙量有关,还与几何结构、河岸河床地质有关。对于这样复杂的耦合结构描述是相当困难的。本文借鉴了广义流原理表征水沙组合,考察“流”的变化从而揭示其驱动河道结构相变机制。“流”从低序相转变到高序相过程中,流量在一定得范围内,其广义流会由极小向极大的突变,意味着河道的两个输入参量水和沙之间的耦合要发生突变,当水流量 $x_1^0 < 6$ 时,水沙耦合加强,使系统的输沙率增加,河道处于冲刷状态;当水流量 $6 < x_1^0 < 9$ 时,水沙耦合减弱,系统的输沙率减小,河道转变为淤积状态;当水流量 $x_1^0 > 9$ 时,水沙耦合加强,使系统输沙率再次增加,河道转变为冲刷状态。

3) 湍流结构的形成过程,通过从李代数的角度来解析 Naveir-Stokes 方程,借以深入了解河流及沙尘暴中沙粒的输运机制和运动轨迹。通过计算,得到了其形式解。对解的形式进行数值调研,得到了层流和湍流以及类似中心、焦点、鞍点等非常丰富的流线结构。考察了这些结构与竖向压力梯度、流体密度、雷诺数等特征量的关系,以期获得结构的形成条件和进一步揭示沙尘暴起沙过程或水流流态与携沙能力的关系。

关键字: 广义指数幂, 序参量, 广义流, Naveir-Stokes 方程

Abstract

With the great development of complex systems physics, which is a hot field of complexity science concerning open systems far from equilibrium, theoretical researches are sharply increasing in the past decade. Investigation on the evolution of river networks is a typical topic in this field. In this thesis, distributions of river network parameters, transport of sediment and the relative changes of river channel patterns are discussed to reveal the get understandings to the evolution of river networks.

1) Statistical dynamical of early river networks: Based on the random prolongation of river channels, a generalized Langevin equation is proposed by abstracting the determinate and stochastic factors. This equation can be transformed into the Fokker-Planck equation to describe the changes of the distributions of river network parameters, channel lengths or river basin areas. The Fokker-Planck equation can be solved by using the Fourier integral transform to obtain a generalized exponential power distribution, which may be common to the systems bearing both random and determinate properties. As $t \rightarrow 0$, the generalized exponential powers degenerates the Gaussian distribution, while $t \rightarrow t_0$ it turned into powers distribution. This distribution can be easily extrapolated to infinity, which might correspond to the field observations conducted nowadays. This change demonstrates the time evolution of river networks, and displays the historical picture of a river network from the initial phase to the mature phase: the variation of the distribution from the Gaussian to the power law displays a gradual developing progress of the river network. The distribution of basin areas is obtained by means of Hack's law. These provide us with new understandings towards river networks.

2) Transformation of river patterns: The essence of river morphology transformation is the self organization of the channel structure so as to adapt to the change of the input or discharge. This variation is performed by feedback between the fluid and the channel. The feedback relates not only to the flow regime and the sediment concentration, but also to the geometry of channel and the bank material. It is very difficult to express such a complex coupling relation (by Described by complex coupling structure). However, if the idea of the so-called generalized flow in which the coupling is included can be put to use and with which the theory of Synergetics is combined, one may investigate the transformation of river channel pattern via revealing the changes of the generalized flow. and examine "flow" of the changes to reveal its channel structure phase transitions. "Flow" from low-order phase transition to the high-order phase process. In the two points, mutation from minimal to maximal, means that the two input parameters of the river between water and sand suddenly enhanced by coupling, resulted to increase capacity that the water carries sand, and the river channel is possible to alter deposited state into scour state.

3) The formation process of the turbulence structure, by view of the Lie algebra, which analysis Naveir-Stokes equation, in order to understand that the sand transport and trajectories in the river and the sandstorm. By calculating, we obtained the solution of formal. Then, we investigate the form of solution by numerical. We obtain amount of streamline structure that include that laminar flow, eddy, and similar to the center point and saddle point in statistical. We examine these structures, which related with the vertical pressure gradient, fluid density and Reynolds et al. To obtain the structure of the formation conditions, and to reveal the sandstorm sand process or between the flow regime and the sand-carrying capacity relationship as is very important in the future.

Keywords: Generalized exponential power, Order parameter, Generalized flow, Naveir-Stokes equation

目录

第一章 绪论	1
1.1 课题研究的背景	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 主要内容及创新点	4
1.3.1 主要内容	4
1.3.2 创新点	4
第二章 河网演化的统计动力学	5
2.1 引言	5
2.2 河道演化的随机动力学方程	6
2.3 河道的概率分布	8
2.4 流域面积概率分布	11
2.5 总结与讨论	12
第三章 河型转变的动力学研究	14
3.1 引言	14
3.1.1 课题研究意义及现状	14
3.1.2 理论依据	14
3.1.3 主要研究内容及创新点	15
3.2 协同学基本理论	15
3.2.1 方程的主要形式	16
3.2.2 非平衡相变及空间的演变	22
3.3 广义流原理在河网中的应用	25
3.3.1 广义流理论	25
3.3.2 建立河网中的序参量方程	28
3.3.3 涨落引起的河网冲淤平衡分析	30
3.4 结论与讨论	35
第四章 形成湍流结构的过程研究	36
4.1 引言	36
4.2 流体方程的建立	36
4.2 求解 Navier-Stokes 方程	41
4.3 结论及展望	46
参考文献	48
致 谢	51

第一章 绪论

1.1 课题研究的背景

随着人类对自然界的探索不断深入,现代科技的迅猛发展和科学研究方法的不断更新,掌握复杂性科学在未来科学研究中必不可少。通过从简单系统到复杂系统、平衡系统到非平衡系统的研究,表明复杂系统和非平衡系统对应着非线性区域的特性,非线性区域的解决可以更多的阐释自然规律。自20世纪60年代以来,非线性科学和复杂性问题的研究,在国际上掀起了一股热潮,成为了经济、工程、社会、生物等诸多领域的前沿课题,逐步形成了一门庞大的学科群——协同学、耗散结构理论、突变论、超循环理论、混沌学、元胞自动机理论、复杂网络等,以研究非线性为特征的非线性科学。它的蓬勃发展,极大的改变了当代科学家的研究模式。

非线性复杂科学的发展是建立在简单线性科学的基础之上,要谈及非线性科学,就必须提及线性科学。在19世纪以前,科学研究是建立在比较简单、稳定的条件下,如果研究的对象行为和结构比较复杂,也是将其简化成为一种简单的、直观的现象来模拟。在物理学上有著名的牛顿力学、对电磁场描述的Maxwell线性偏微分方程组、牛顿粘性定律等诸多的系统是用线性微分方程来描述的。随着科学研究方法的不断更新、认识自然层次不断加深,人们发现很多自然现象用线性模型解释时,涌现诸多矛盾结论(世界本质上是非线性)。为了能诠释这些线性科学解释不清楚的问题,引入叠加原理,解释了一些现象,但没有得到本质的解决。直到非线性科学的诞生,而诺贝尔奖获得者I. Prigogine提出了“耗散结构理论”和“自组织原理”,从本质上揭示了非线性科学的特征^[1]。随后,由H. Haken先生创建了“协同学”理论,并且对“自组织”进行了全面的阐述^[2]。再之后, Lorenz发现混沌, Mandelbrot提出分形,让复杂性非线性科学得到了空前的发展。

非线性复杂科学的逐步形成,使人类认识自然的方式和思维发生了巨大的转变。之前,一直利用线性系统来处理自然问题,即在已知确定的初始条件下,建立模型来预测未来状态的过程,哪怕系统初始条件有微小的变化,对系统未来的状态的只有微弱的影响。初值不敏感,主要是由于建模过程中采用了线性系统——具有叠加性——无限多个小量的叠加。然而,真实的自然系统是复杂的、非线性的、不具有叠加性的,譬如:著名的蝴蝶效应、沙尘暴的形成、土地沙漠化、经济市场的演化、物种的演变等现象,对初值的依赖性和敏感性,对演化过程的选择性,基本上不能用简单系统或者用简单系统叠加来完全描述。因此,将其划分为大量的小系统。对小系统(子系统)作类简单系统处理,随后将子系统相互耦合,就可以得到巨系统的整体描述,但这样的描述就有了一定的不确定性,比如:气象的不可预测性、沙尘暴走向的任意性、股票价格涨落的随机性……。为了能剖析这些现象的机制,随之出现了初值敏感问题、混沌吸引、分形问题等等^[3],让更多的科学家对非线性复杂科学产生浓厚的兴趣,对完全开放复杂系统的研究也成了一个炙热的科学问题。完全开放系统,即系统与外界之间进行物质和能量的交换,系统的状态不仅要受到自身的束缚,还要受到外界对其的影响。比如:生物链系统(不仅要受到自身和天敌对他们生存的影响,还要受到环境对其的间接影响)、市场经济系统(不仅要受到市场供需平衡的影响,还要受到地方政府对其的干预)、自然河网系统(它的形态要受到地质、河道形态、流量之间的耦合作用,还要受到外界的随机涨落的影响,降雨量、地震等自然因素的影响)等等。如何用科学的方法将其清楚的描绘出来,是复杂非线性科学的基本任务。带着这样的问题, I. Prigogine的“结构耗散理论”中阐述了一个完全开放系统,在远离平衡的条件下,与外界环境进行物质、能量和信息交换时,系统会自发地由无序态趋向有序态,形成一定的结构。这样系统在内部的相互作用下,由一种状态转变到另一种状态,为研究大量客观事物的发展演化提供了思路。而H. Haken先生的“协同学”则认为复杂系统从无序状态演化为有序状态,形成一种时空结构,是由于其子系统之间的相互耦合、相互作用推动的,提出了“自组织”理论。

由大量子系统组成的巨系统,通过唯象理论对复杂系统的分析结果往往是系统处于某一

状态的平均值,无法对系统状态演化过程进行深入的探究。为了能进一步剖析系统内部子系统之间的相互耦合,导致系统结构的演化,提出了层次分析法。层次分析法主要特点是:宏观系统的分析得到的系统的平均值,但系统的状态仍未能完全确定,也是可以随边界条件和随机涨落而发生变化。由于对系统内部子系统的相互作用不清楚,因此,就将其当作为系统受到外界的随机涨落。在唯象分析得出系统演化方程的基础上,引入随机扰动项(子系统之间的耦合作用),这样就得到了系统演化在随机层次上的方程。譬如:带有随机项的反应扩散方程:Langevin方程、Master方程、几率跃迁的Fokker-Planck方程。通过对这类方程的求解(此类方程在数学上有规范的解法),不仅可以得到系统状态的平均值,而且可以研究系统的涨落情况,对系统有更进一步的了解。针对不同的非线性系统,人们采用了不同的方程来描述系统在随机层次上的演化行为。

非线性科学研究问题的体系主要包括三个方面^[4]:1、研究体系的根源是复杂的;2、认为随机理论才能更深刻的反映系统的本质;3、主要研究完全开放和能动系统。而非线性动力学则旨在分析和研究系统的非线性动态现象。20世纪六、七十年代研究气象学、生态学、数值模拟等方向的巨大进展奠定了非线性动力学的发展方向和基础。它的真正价值在于,不仅从大量的观察经验中发现混沌等非线性现象是普遍存在的,而且得到非线性思想的普适特征,进一步加深对自然现象的理解。非线性动力学关注和探索非线性动态现象,而绝非仅以研究非线性动态方程为特征。事实上,平衡动力学中的动态方程是不乏非线性的,但是受平衡思维的限制,均衡分析的着眼点在于定态,而没有对其中可能出现的非线性动态现象予以重视和关注,更谈不上如何去探索其中的复杂性。非线性动力学的建立离不开非线性动态方程,因为线性动态方程只能给出无限发散、回归定态、简单周期振荡等几种简单图谱,不能给出更有价值的非线性动态现象。

随着复杂网络的蓬勃发展,为我们认识复杂系统提供了一个全新的视角。这种在一定的规则条件下将系统单元简化为顶点,将系统单元之间的耦合抽象为图论中连接顶点的边,这种复杂系统的表达方式是科学方法论的新突破。复杂网络是一门多学科交叉的独立的学科,因而它的发展促使了许多边缘学科的形成,能够进一步诠释现实生活中复杂现象。在复杂网络研究兴起之初,Dodds 和 Rothman 在他们的系列文章中用统计的方法对各种标度规律进行了阐述。

河流网是一个完全开放的复杂系统,它蕴含着无尽的可再生能源,但它也承载着可怕的灾难,如果我们应用得当,那么它就是造福万民的自然资源(灌溉农田——为民带来丰收;水力发电——为未来的科技、为经济发展提供源源不断的能源等等);如果令其肆无忌惮的任意发展,不能有效的控制其暴起的势头,将给人类带来不可估量的灾难(洪水、黄河下游地区的淤泥、泥石流等)。如何去治理,是诸多科学家比较关心的问题,一些工程师利用加固和加深河道、河床,使河道的形态尽可能的保持不变,形成一种引流的态势,这将导致了黄河下游地区著名的“地上河”;也有一部分人在利用生态来维护河床:在河岸种植各种能固定的植物,让植物的根植入泥土,形成一种稳固的网状结构,加大了河床的承载、形变能力,大大提高了河道的自组织能力。但是盲目的进行河道维护,并不一定能收到想要追求的效应。因此,部分学者将目光转到了河道形态的理论研究,主要是依据河流的流量连续性、质量守恒定律等建立河网的模型,研究侵蚀过程以理解河网的形成和存在于自然河网不同参数间的普适标度关系、利用统计力学理论和方法揭示标度关系的成因;利用元胞自动机理论,数值模拟河道形态演化的过程;利用分形理论,研究河道的分布形态等等。由于河道的参数的多样化、参数之间的相互作用复杂化、河道形态与河道参数之间的耦合反馈模糊化,导致我们只能从定性的角度上分析他的结构和形态。本研究试图从三个方面来研究河道形态的演化:1. Langevin的随机动力学方程到Fokker-Planck的几率跃迁方程,来描述河网形态的历史演化过程;2. 利用协同学的奴役原理和自组织思想,探究河道形态转变的主导因素,通过改变河道参数和外界的“涨落”来调整河道的形态;3. 通过求解Navier-Stokes方程,模拟湍流的演化过程,分析河网中颗粒物质的输运轨迹。

1.2 国内外研究现状

对于河网系统,在非线性和动力学方面,一些学者在理论方面做了一些相关的工作。但,迄今为止还没有建立一个能够被普遍接受的理论,来阐明实验中的一些标度规律的成因,几乎在这方面的工作采用动力学稳态——最优能耗理论,与河网实际统计结果做一些对应来获得相应的阐述。基于稳态的特性,有学者用类似于 Boltzmann 分布对河网演化过程进行了热力学描述,但在多尺度的角度下涌现了一些不足。要想从河网演化的本质揭示自然现象,须采用一些类似于河网系统的理论处理,非平衡统计理论的方法和思想、复杂系统的统计动力学模型和开放系统——结构耗散理论的基础。目前,国内外学者试图用耗散结构理论解释河道形态的演化和分形理论对河长、流域面积的分布等相关方面的研究,取得了一些突破性的成果。但,遗憾的是这样的工作只是限于定性说明,没有能定量的描述其演化的本质。

河网的形态——千奇百怪、形态各异。根据大量的统计数据,我们将河道形态划分为弯曲河道、顺直河道、辫状河道(游走型河道),如此多样的河道形态是如何形成的?主要是由于河道形态的形成受到自然环境的剧变、受到人类在日常活动中强行施加的“外力”、受地理位置约束、河床和河网参数之间的复杂相互作用等等因素的影响,但如何能探究清楚各参量之间的定量关系,是一个相当复杂而庞大的工程等等,一些学者利用水沙耦合、反馈(正反馈和负反馈)关系建立网络动力学模型,试图去理解自然河网的动力学行为。这些工作为认识河网的动力学演化过程提供了一些理论手段:河道形态的形成、河网的二分树结构、河道形态的冲淤双临界现象等等。在这些河网的特性中,二分树结构是如何形成的,这样的结构使河道参数服从什么的分布,相关领域的科学家做了一些实际河网参数统计,发现河道的梯度、宽度、深度与流量之间成幂律关系^[5];梯度与流域面积之间成负幂律关系^[6];J. T. Hack 提出了河长和流域面积之间成负幂律关系^[7]。但没有一篇文章报道河网这些结构和统计结果是如何建立起来的?它的演化历史又是什么?本文第一部分试图从动力学角度建立河道演化的模型,分析河道参数的一些标度规律的形成过程。

德国哲学家莱布尼茨说:“世界上没有完全相同的树叶”。它主要是想说明没有完全一样的生存环境。河网是一个完全开放的系统,河道形态千奇百怪,不仅要受到自身参数的相互耦合、反馈,还要受到外界环境对河道的随机作用,使河道在同一时刻不同的河段、在同一河段不同的时刻携沙系数不同,这样就导致河道参数对河床的冲刷能力发生的变化(出现了冲刷型河道和淤积型河道),这样的状态持续不断地随机变化。Rodriguez-Iturbe等在1993年依据经典量子统计的哈密顿量最小化选择生成树的方法,提出了河网是最小能耗原理支配下的水流最佳通道网,再现河网结构^[8]。国内一些学者利用元胞自动机构建了弯曲河道的基本演化过程^[9]。对于开放系统的特性——多参量、耦合复杂等等。对于构建模型是一种严峻的挑战,有学者曾借鉴Haken先生提出的协同理论,建立了广义流原理处理了开放系统^[10]。这些理论为处理开放系统提供了一种新的手段和思维,不仅减缓了系统多变量难的问题,还加强了系统变量之间的耦合模糊的问题。本文第二部分就是采用广义流原理和协同学的思想,建立河网系统的广义流方程,广义流在约束条件下,对其进行坐标变化,使其在新坐标系下变量之间满足正交关系;然后计算系统的序参量方程,试图分析系统对外界的涨落的承受能力,参变量之间的变化关系。

河道形态的变化,主要是由河道对河床泥沙的输运情况来决定。然而流体的能量、动量和物质输运主要依赖于湍流,它能加强流场的速度、温度和流动物质之间的耦合。如何能准确的测量流场中的各物理量,通过求解流体的控制方程来预测流场的未知信息,这项工程已经是流体力学领域中的重要课题之一。理论上湍流的研究已有一百多年的历史,但仍然是物理学中待解决的主要问题。湍流的基本信息都涵盖在Navier-Stokes脉动量方程中(基于雷诺提出的湍流模式的平均方法,包括平动和脉动量)^[11],但求解此方程是一项非常复杂的工作,因此,研究工作者将以一定模式的Navier-Stokes方程来描述,做出了很多值得借鉴的工作。目前,工程计算中主要依赖两种模式:1. 满足Boussinesq猜想的涡粘性模式(一混合长度模式、二方程 $k-\varepsilon$ 模式);2. 利用二阶矩方程进行封闭模化(二阶矩闭合或雷诺应力模式)。这样的模式方法提高了湍流的计算。从力学角度来看,对雷诺应力的模化和各物理量的不变约束条件(模化后的表达形式与之前的表达形式具有相同的物理张量性质、一致的量纲、独立的坐标系),在此基础上建立了大量的复杂非线性湍流模式,如何建立完备的非线性模式成为现代湍流问题的重点研究课题:Shih和Lumley提出了二阶非线性压力—应变率快速项模式;Launder研究小组提出了三阶的非线性模式;Speziale建立了非线性的涡粘性模式。统计

力学对湍流的研究模式也越来越重视, Haworth和Pope依据概率密度函数, 借助Langevin方程重新构建了控制方程; Yakhot和Orszag提出了基于重整化群思想的湍流模式, 对Navier-Stokes方程进行了修正, 引入了系统的随机项, 认为系统的变化是由随机项引发的。虽然湍流的研究在近期有了长足的进步, 但仍存在诸多的问题有待解决: 1. 各向异性的输运模式; 2. 符合物理趋近极限性质的近壁湍流模式。本文第三部分内容就是直接利用李群的方法求解简化模式的Navier-stokes方程, 试图得到湍流的基本流形机制。

1.3 主要内容及创新点

1.3.1 主要内容

本文第二章基于最小能耗原理支配下的水流最佳通道, 建立河网随机演化的 Langevin 方程, 利用水流连续性定理, 能量耗散理论等, 确定影响河网形态的确定项和受到外界随机干扰的随机项。之后从随机涨落的 Langevin 方程转变到河长随机分布的 Fokker-Plank 几率跃迁方程。求解 Fokker-Plank 方程, 得到了河长的累积概率分布, 随着时间的演化得到了河网演化的历史全景图。

第三章利用协同学和广义流处理复杂开放系统的思想, 建立了河网系统的广义流, 对广义流函数进行形式的变换, 引用奴役原理得到系统的序参量方程。阐述了河网系统的双临界现象, 并从概率的角度分析了, 系统在在接近动态平衡时, 受到外界驱动, 引起系统突变的的状态选择, 解释河网双临界现象的过程。当输入幅度不同的外界涨落后, 不同河道承载外界的能力不同, 导致河道形态发生转变——从游荡型转变成成为弯曲型河道。

第四章试图从河道泥沙输运方面对河道形态进行描述。流体输运主要依赖于近壁面的湍流的形成, 而湍流形成的控制方程是 Navier-Stokes 方程。本文就是利用李群求解微分方程的方法, 求解了流体控制方程, 从统计动力学的角度, 得到层流和湍流以及类似中心、焦点、鞍点和涡流的流线结构图, 揭示了泥沙的输运过程。

1.3.2 创新点

1. 利用统计动力学的方法, 考察河网演化的历史过程和幂律分布是如何建立起来; 首次提出了随机性和确定性是同等重要的标度律的动力学根源。

2. 自然河网是一个完全开放的复杂的动力学系统, 时刻都与外界进行着物质和能量的交换, 水流与河床河岸物质之间的相互作用使得河道在长期的演化过程中为适应环境作用(水沙过程), 依据自身河床河岸的地质地理条件(抗冲性等), 做出的一种最优化的选择, 形成一种相对稳定的河型。而协同学正是处理这样的完全开放、自适应的系统, 建立序参量方程, 并求解出河网系统的序参量方程及空间的周期或者准周期解, 解释了河网系统在引入不同强度的外界驱动力后, 系统的状态由稳定变得不稳定, 经过一个自适应过程后, 系统又重新达到另外一种稳定状态; 解释了系统在突变后, 要寻找另一种相对稳定的状态时, 利用 Fokker-Planck 的几率跃迁, 获得了系统在重新选择新状态时的选择定则。将整个水沙组合分成了三个部分, 清水期的冲刷态、淤积态, 以及高含沙水域的冲刷态。

3. 利用李群的求解微分方程的方式, 求解 Navier-Stokes 方程, 得到统计力学上的不稳定点、鞍点、焦点等流线图。

第二章 河网演化的统计动力学

2.1 引言

在自然界中诸多分布揭示了在一些标度变化的不变性, 幂律分布深厚的科学意义吸引了大量科学家的关注, 譬如自组织临界现象(颗粒物的分布)^[12,13], 复杂网络的演化(度分布的特征)^[14,15], 自然选择模式: 例如, 河网分形和它的标度行为^[16,21]等等。众所周知, 河网系统是研究自然系统不同参量和输入变量之间标度关系, 河道长度、流域面积以及能量耗散的概率分布^[22,25]。

在河流网系统中, Leopold提出了开创性研究领域, 揭示河道的坡度、宽度和深度之间的幂律关系^[26,27], 从那时起, 实证研究和理论研究进行了几十年的蓬勃发展。借助自然流域的数字化图像处理, 表征河网大尺度的测量和特性成为了现实。Rodriguez-Iturbe等人证明了自然河网流域面积的累积概率服从幂律分布^[25],

$$p(\geq a) \propto a^{-\alpha} \quad (2-1)$$

这里 a 的指数部分 $\alpha \sim 0.43$ ^[8,12,17], 其取值范围为: $0.41 \sim 0.45$ ^[8]。在河网节点处, 集雨量正比于流域面积, 与河道分叉处注入量服从相似的累积概率分布。基于河道单位长度上的能量耗散理论正比于幂律的 $\frac{1}{2}$, 认为能量耗散的累积概率也服从幂律分布。Maritan 等人阐述了河道长度的累积概率有相似的幂律形式^[23]:

$$p(\geq l) \propto l^{-\beta} \quad (2-2)$$

这里 β 的取值范围是: $0.8 \sim 0.9$ 。在有限尺寸效应下, 世界各地河网 β 值的取值范围 $0.67 \sim 0.85$ ^[29]。

有趣的是, 上述两种受流域面积 a 和河道长度 l 支配下的幂律关系, 由 Hack 定律将其联系起来, 而 Hack 定律的形式为:

$$l \propto a^{-\gamma} \quad (2-3)$$

Hack 先生考察 Shanandoah 山谷和 Virginia 山系, 首次提出这种关系^[30], 现在作为一种基本规律被广泛接受。因此, Hack 指数 γ 经验值的取值范围为 $0.5 \sim 0.7$, 通过关系(2-3)可以得到指数 α 和 β 的取值范围^[19,23,32]。

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \gamma \\ \beta = \frac{1}{\gamma} - 1 \end{cases} \quad (2-4)$$

世界能演化成为目前这种结构, 主要是由于上述所描述的幂律分布支配下的结果。换句话说, 是什么导致了标度关系? 尽管做了大量的工作从本质上理解一个完善的选择机制, 但这个问题仍然可能是不唯一的。关于这种问题模型的理论研究成了主要的。Leopold首次借助于随机游走方式模拟了流体在起伏地表上方向任意变化的河床演化的模型研究^[33]。模型的输出量能有效的描述真实流域的特性。被称为地形演化的模型大多数是根据流体的性质建立局部侵蚀导致河道随机伸长; 改变地貌的局部高度。这些模型生成了大量的树状网络, 由方程(2-1)-(2-3)和河道参数与流量之间的标度关系揭示了河流网络的基本特性。在模型中足部侵蚀规律看起来是确定性的, 但它出现在一个随机涨落的环境中。因此可以说, 这些模型的关键在于两点: 随机性和侵蚀性。显然, 这些模型在随机游走方式和确定性研究是一致的。然而, 在参考文献^[19,23]中给出结论, 方程(2-1)和(2-2) 在大尺度下理论和经验的结构与观察的结构不能完全吻合。Maritan引入有限尺度效应, 拟设系统的条件概率^[12]。Dodds和Rothman阐述了对于小标度的线性面积和大尺度网络固有离散性(尺度越大, 样本的数目点将离散), 其标度行为是失效的。他们的理论和实证研究支持这个观点^[33-36]。

由 Rinaldo 等人提出基于最小能耗原理支配下的水流最佳通道网络模型的研究^[37]。这个

原理被认为是最小作用原理,意味着实际系统是所有可能演化路径中最接近于最大限度的减少相互作用途径。它表明的重要的科学价值和实证意义。该模型假设,河道的结构是在最小总能耗下生成的最优河流通道网。这里的能量是指在输入全部流域^[16,37]或者局部流域^[38]上所有沉淀物。**Banavar** 等人在很大程度上证明了最小能耗导致的结构相当于网络所产生的地貌演化归因于地貌演化的一些方程组的固定解的最优组合^[39]。

显然,在上述的模型研究中,不论是在系统的初始状态或演化过程中,随机性在河网生成过程中扮演着主要的角色。事实上,**Rinaldo** 等人指出对于河流网络的动力学根源,随机性和确定性是同等重要的因素^[40],他们也阐述了复杂系统的无标度特性依赖于一般动力学系统特性以外的个体系统细致行为。对事件或尺度的描述,意味着标度不变行为想法的基础是一个普遍存在的现象有关的非还原理论。非还原论(例如:涌现和整体论)讲的一般性和普适性。他们认为非还原论是统计力学的方法论,因此,有理由相信可以建立统计力学的框架重现标度行为以致获得对幂律分布更深一步的理解。事实上,**Dodds**、**Rothman** 和 **Banavar** 做的典型工作^[34-35,39]。指出了幂律分布是地貌稳定形态下的特征、对于流域面积的足够长时间演化、也是理论模型稳定结构解。一些问题困扰着我们:在达到稳定状态或者演化过程中,是否有一定的规律在支配流域面积或河长分布?所观察到的标度行为是否与时间有关?

为了能解决上述这些问题,考察了河网的演化历史,试图从理论来揭示河网的统计动力学机制。从这个想法入手,我们建立了在早期河网演化过程中的广义 **Langevin** 方程表述河道的随机延伸。之后,将这个随机动力学方程转换成为 **Fokker-Plank** 方程,来研究早期河网演化过程中河道分布的转变。借助概率或者概率密度函数得到指数函数和幂律函数的乘积形式的解。对于这些解的一个有趣的事实是他们可以展现河网演化的历史画卷。在早期的演化中,河长的分布是由高斯分布所主导的,揭示了早期河网演化的随机性。然而,这种分布逐渐丧失了高斯分布的特性——对称性破缺。随着长期的偏差,最后变成一个带长尾偏离的幂律分布。幂律分布可能标志着发展或者成熟的河网。实际上,从高斯分布转变到幂律分布是从无序(均匀分布)到有序(无标度分布)河网的自组织演化。**Maritan** 等人采用相似的方式^[23],利用 **Hack** 定律的河道长度分布和流域面积分布之间的关系,将河长分布可以转变成为流域面积分布。这样详尽的讨论为我们提供了更多河网本质的理解。

2.2 河道演化的随机动力学方程

河网演化实际上是河道随机延伸和分叉的过程。在本文中,河道的延伸不仅由于降雨量的侵蚀,随机性是由于降雨量和变化量,地球表面的状态,如植被和地质以及其它的相关因素。鉴于此,河道的延伸是一个典型的随机动力学过程。它可以由一个广义 **Langevin** 方程的一般形式来描述,

$$\frac{dl}{dt} = f(l, t) + g(l, t)\xi(t) \quad (2-5)$$

右边的第一项是确定项,对应于河道的侵蚀;第二项是随机项,对应于上述涨落(外部的乘性噪声)所引起的郎之万力。变量 $\xi(t)$ 表示高斯白噪声,其平均值的特性,

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (2-6)$$

二阶相关函数的平均值为,

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (2-7)$$

这里的 D 是高斯噪声的强度。

现在我们基于侵蚀机制推导 $f(l, t)$ 。通过图2-1对初始态的河道进行抽象描述,

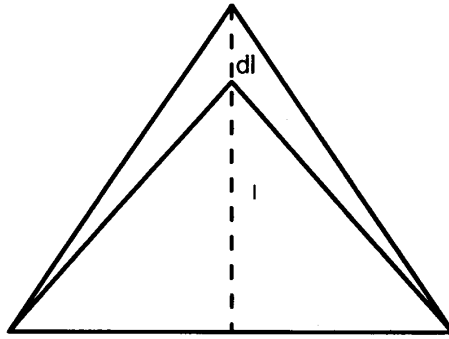


图2-1 河道初始状态示意图，在 dt 时间的伸长量为 dl

这里我们假定初始河道采用固定宽度 w 表示底边和长度 l 三角形式。在时间间隔 dt 后长度变为 $l + dl$ 。长度的增加量 dl 是由于降水量侵蚀导致的结果。在陆地面积为 S 上的有效集雨量很难确定对河道演化的贡献。这里我们将其近似为扇形，以底部中心作为圆心， kl 作为半径(k 一个比例因子)。因此，我们可以得到：

$$S = k'k^2l^2 \quad (2-8)$$

这里的 k' 是另一个常数。当 k' 也与淤积物的区域形状有关，因此， k^2 和 k' 可以合并成为一个新的参数，用 k 表示，满足

$$S = kl^2 \quad (2-9)$$

在这里，我们来处理影响集雨量区域的形状因素。毋庸置疑，确定它是相当困难的，由于实际淤积区域的形状在演化过程中是随机变化的。因此，区域上的集雨量在理论上可以写成为：

$$Q = qS \quad (2-10)$$

这里的 q 代表的是在单位面积上单位时间内的降雨量。因而，在时间间隔 dt 内河道的拓展部分增加的面积可以表示成为：

$$dA = \frac{1}{2} w dl \quad (2-11)$$

关键是降雨量与 $f(l, t)$ 相关造成的侵蚀量 Q_e 。降雨量和流量 Q 之间的关系来描述泥沙输运量 Q_s 可以用来参考表达 Q_e [41]，有，

$$Q_s = \eta Q^\delta \quad (2-12)$$

这里的 η 是泥沙输运系数， δ 是指数。在假设流量 Q 非线性依赖于河道的坡度 r (例如 $Q \sim r^n$) 条件下 [31]，此关系也可以有方程推导出 $Q_s = k_f Q^m r^n$ 。 $Q_s \approx Q_e$ 至少在河头部分成立，在河网的发展过程中淤积可以被忽略，就可以得到方程(2-12)推导形式，

$$Q_e = e Q^\delta \quad (2-13)$$

这里的 e 是与土壤性质相关的侵蚀系数。这个方程表示在单位时间间隔内侵蚀量与时间间隔的乘积应该等于土壤的流失量 dAh ，相当于平均深度为 h 河道的伸长。基于上述的讨论，联合方程(2-8)-(2-13)可以等到，

$$\frac{dl}{dt} = \frac{keq^\delta}{wh} l^{2\delta} \quad (2-14)$$

方程(2-14)右边的第一项实际上是平均值可以作为 $f(l, t)$ 的变量或系数。如果考虑到涨落，可以将方程(2-14)写成为，

$$\frac{dl}{dt} = \frac{(k \pm \Delta k)(e \pm \Delta e)(q \pm \Delta q)^\delta}{(w \pm \Delta w)(h \pm \Delta h)} l^{2\delta} \quad (2-15)$$

这里的 $\Delta k, \Delta e, \Delta q, \Delta w, \Delta h$ 分别是 k, e, q, w, h 涨落的幅度。对其各项作泰勒展开并忽略高阶项，就可以将上述方程转化成，

$$\frac{dl}{dt} = \frac{keq^\delta}{wh} l^{2\delta} \left(1 \pm \left(\frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta q}{q} \delta - \frac{\Delta w}{w} - \frac{\Delta h}{h} \right) \right) \quad (2-16)$$

假设 $M = \frac{keq^\delta}{wh}$, $\varepsilon = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta q}{q} \delta - \frac{\Delta w}{w} - \frac{\Delta h}{h}$, $\kappa = 2\delta$ ，上述方程就可以变化为，

$$\frac{dl}{dt} = Ml^\kappa \pm M\varepsilon l^\kappa \quad (2-17)$$

这里的 ε 是由相对涨落引起的纯噪声，那么噪声自然是 $\pm M\varepsilon$ 。显然，通过对比方程(2-5)和(2-17)对应项，就可以得到，

$$f(l, t) = Ml^\kappa, \quad g(l, t) = l^\kappa \quad (2-18)$$

这就建立了描述河道随机延伸的朗之万方程。

2.3 河道的概率分布

从郎之万方程可以推导出任意的 n 阶矩，对于方程(2-7)，众所周知，高斯白噪声关联函数等于零，而 $l(t + \tau)$ 和 $l(t)$ 的关联函数可以表述成如下形式，

$$\begin{cases} \langle l(t + \tau) - l(t) \rangle = (f(l, t) + Dg'(l, t)g(l, t))\tau + O(\tau^2) \\ \langle (l(t + \tau) - l(t))^2 \rangle = 2Dg^2(l, t)\tau + O(\tau^2) \\ \langle (l(t + \tau) - l(t))^n \rangle = 0, \quad n \geq 3 \end{cases} \quad (2-19)$$

其中 $g'(l, t)$ 是 $g(l, t)$ 对 l 的导数，代入上述Kramers-Moyal展开^[43]只保留线性项的方程，随机动力学方程就转变成为Fokker-Planck方程来描述河道长度的条件概率的含时演化，

$$\frac{\partial}{\partial t} p(l_0, l; t) = -\frac{\partial}{\partial l} (f(l, t) + Dg'(l, t)g(l, t))p(l_0, l; t) + D \frac{\partial^2}{\partial l^2} g^2(l, t)p(l_0, l; t) \quad (2-20)$$

其中 $p(l_0, l; t)$ 表示条件概率函数，即河道长度在 $t = 0$ 时刻的 l_0 经过时间 t 后转变为 l 的概率。假设系统的初始条件，在 $t = 0$ 时刻河道的初始长度 $l_0 = 0$ ，那么概率密度 $p(l_0, l; t)$ 变成了 $p(l; t)$ ，也满足方程(2-20)。将(2-18)代入方程(2-20)，则有，

$$\frac{\partial}{\partial t} p(l, t) = -\frac{\partial}{\partial l} (Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1})p(l, t) + D \frac{\partial^2}{\partial l^2} l^{2\kappa} p(l, t) \quad (2-21)$$

对方程(2-21)两边进行时间积分，可以得到，

$$p(l, t + \tau | l', t) = \left(1 - \frac{\partial}{\partial l} (Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1})\tau + D \frac{\partial^2}{\partial l^2} l^{2\kappa}\tau + O(\tau^2) \right) \delta(l - l') \quad (2-22)$$

其中 $p(l, t + \tau | l', t)$ 是条件跃迁概率，从 t 到 $t + \tau$ 时间间隔内河道长度从 l' 跃迁到 l 的概率。忽略 τ 的高阶项，上式就可简化为，

$$\begin{aligned} p(l, t + \tau | l', t) &= \left(1 - \frac{\partial}{\partial l} (Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1})\tau + D \frac{\partial^2}{\partial l^2} l^{2\kappa}\tau \right) \delta(l - l') \\ &= \exp \left(-\frac{\partial}{\partial l} (Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1})\tau + D \frac{\partial^2}{\partial l^2} l^{2\kappa}\tau \right) \times \delta(l - l') \end{aligned} \quad (2-23)$$

对 δ 函数进行傅里叶积分变换，那么就有，

$$\begin{aligned}
p(l, t + \tau | l', t) &= \exp \left(-\frac{\partial}{\partial l} (Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1}) \tau + D \frac{\partial^2}{\partial l^2} l^{2\kappa} \tau \right) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(l-l')} dk \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-ik(Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1}) \tau - k^2 D l^{2\kappa} \tau + ik(l-l') \right) e^{ik(l-l')} dk \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-D l^{2\kappa} \tau (k - i \frac{(Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1}) \tau - (l-l')}{D l^{2\kappa} \tau})^2 - \frac{((Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1}) \tau - (l-l'))^2}{4 D l^{2\kappa} \tau} \right) dk \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi D l^{2\kappa} \tau}} \exp \left(-\frac{((Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1}) \tau - (l-l'))^2}{4 D l^{2\kappa} \tau} \right)
\end{aligned} \tag{2-24}$$

上述的计算过程中利用了 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 的特殊积分。我们就可以得到含时河道长度分布函数，即

$$p(l, t) = \frac{l^{-\kappa}}{2\sqrt{\pi D \tau}} \exp \left(-\frac{((Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1}) \tau - (l-l'))^2}{D l^{2\kappa} \tau} \right) \tag{2-25}$$

在接下来的探讨中，我们选择上述参数的值分别为， $\kappa=1.25, M=0.09, D=0.0049$ 。

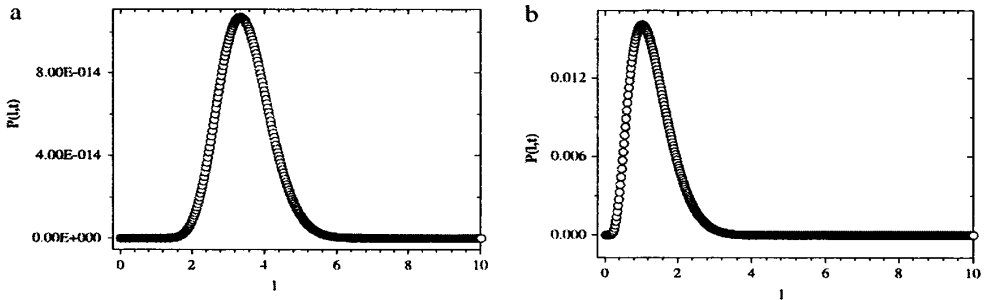
显然这样的解具有两个函数乘积的特性：一个幂形式，另一个是指数形式。讨论这样的广义的指数幂形式的分布。在实际系统中，许多观测是一种类似的分布形式^[44-47]，被称作是指数幂分布(EPDs)，例如，一些复杂网络的度分布^[43]。指数幂分布的两个等价形式，其中一类被称作是漂移幂律分布(SPL)，其形式为 $p(x) \propto (x+a)^{-\mu}$ ^[45]；另一类是指数分布(SED)，表达式为 $p(x) \propto \mu(x_0^{\mu-1}/x_0^\mu) \exp(-(x/x_0)^\mu)$ ^[46]。对于前者的特征参数 a 和后者的参数 μ ，当 $a=0$ ($\mu \rightarrow 0$) 时，漂移幂律分布就趋向于经典的幂律分布，然而当 $a \rightarrow \infty$ ($\mu=1$) 漂移幂律分布简化成了指数分布。正如Lerrènette和Sornette认为这些分布规律能解释幂律更具物理上的有限尺寸效应的修正。

现在问题就是，是否存在类似参数极限形式下的广义幂指数分布描述方程(2-25)特征？如果这样，极限形式是什么？为了回答这个问题，我们给出了图2-2所描述的概率随时间变化的曲线。起初，类高斯分布占主导地位，其具有单峰和在峰点出具有对称性。然而，随着时间的演化，这种对称性迅速被破坏，与高斯分布对比

$$p(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \tag{2-26}$$

广义幂指数分布的影响因素 $\frac{1}{2\sqrt{\pi D \tau}} \exp \left(-\frac{((Ml^\kappa + \kappa D l^{2\kappa-1}) \tau - (l-l'))^2}{D l^{2\kappa} \tau} \right)$ 和 $l^{-\kappa}$ 共同

调控的结果。主导因素决定了单峰，而两个共同调控破坏了峰的对称性。图2-2也表明了概率曲线的变形，左边的峰逐渐地被蚕蚀。最后，概率分布转变成了单调递减。这里应该指出图2-2的分布没有归一化。



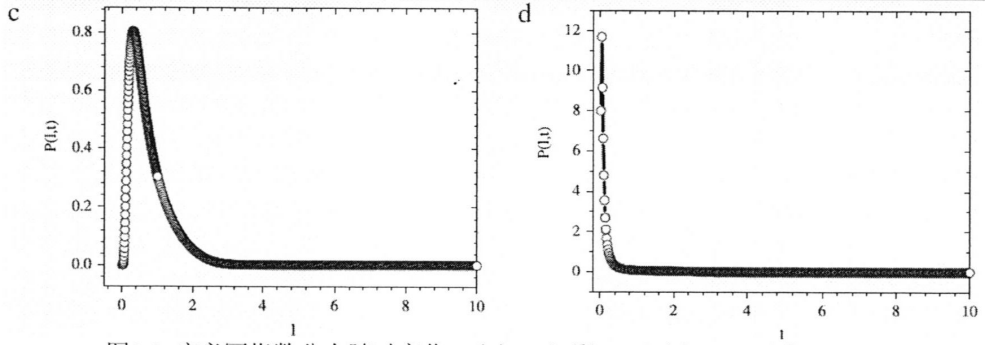


图2-2 广义幂指数分布随时变化: (a) $t=1$; (b) $t=5$; (c) $t=15$; (d) $t=20$.

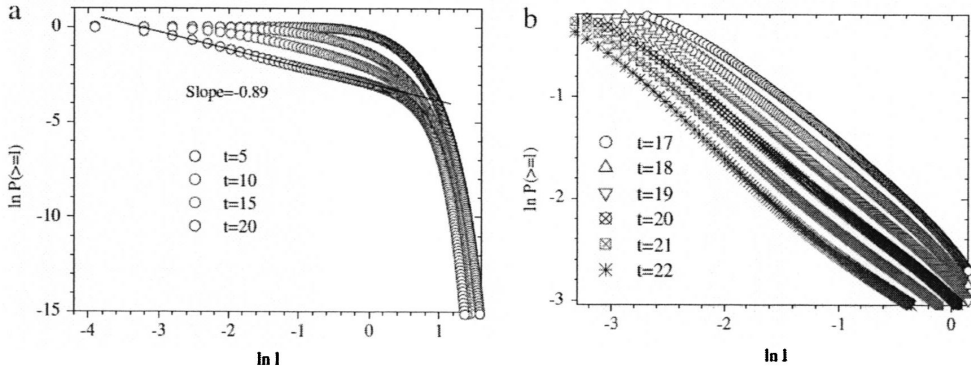


图2-3 河道的累积概率分布: (a) 显示标度率; (b) 局部放大曲线在不同时间上的平行关系

诸多统计理论和实证研究中,在河网的实证调查中通常采用累积概率分布以避免由于有限的数据导致过大的误差。为了比较我们的理论结果和河长累积概率分布的观测值,对方程(2-25)从 $l \rightarrow \infty$ 积分,

$$p(\geq l, t) = \int_l^{+\infty} p(l, t) dl \quad (2-27)$$

图2-3 (a) 描述的是当 $t=20$ 时的双对数图, 假设是幂律分布, 则有

$$p(\geq l, t) \propto l^{-\beta'} \quad (t=20) \quad (2-28)$$

$\beta' = 0.89$ 是在Banavar等人阐述的方程(2-2)中 β 的合理取值范围内。事实上, 这种标度规律在 $t \geq 16$ 就已经建立。如图2-3 (b) 所示, 从 $t=17$ 到 $t=20$ 不同时间上的曲线拟合, 相互之间几乎保持平行, 它的斜率随时间微弱的增加, 意味着标度规律已经建立, β' 近似为固定值。然而, 曲线在 $t=22$ 时失去了单调性。从那以后, 曲线将偏离了标度规律。曲线的拟合部分逐渐的缩短甚至消失。背离幂律分布看起来好像是我们工作的一个弱点。但是, 我们想提醒读者注意尤其是郎之万方程的构造, 这里我们讨论的是用于描述发展中河网从起步阶段到发展过程中河长的幂律分布已被建立, 而不是一个发达的河流。这种不合理的描述可能与长期的三角状河道公式(2-11)、降雨量收集区域的表达式(2-9)和侵蚀关系(2-13)有关。他们共同决定了郎之万方程不适合描述发达河道的延伸。这种不合理被转变成Fokker-Plank方程和它的解, 导致分布变形, 最后幂律分布完全失去了它的特性。

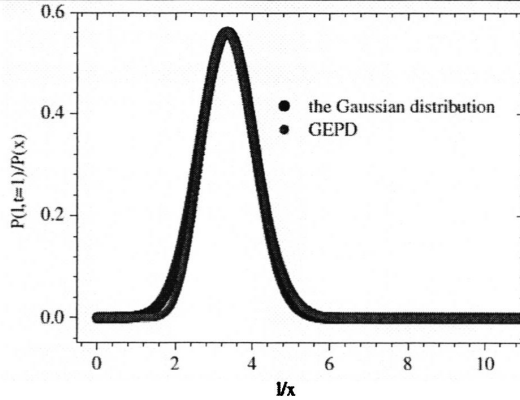


图2-4 比较高斯分布和广义幂指数分布揭示初始河网演化是由高斯分布主导

让我们再次关注幂律分布建立之前,初始河网的类高斯分布:早期演化的高斯分布究竟是什么?图2-4是在 $t=1$,归一化因子 $N=3.72 \times 10^{13}$ ($N \int_0^\infty p(l,t)dl=1$)。与归一化高斯分布($\mu=3.34, \sigma=0.7$)基本上一致。这证明了在早期演化过程中河道长度的概率分布是由高斯分布支配。

到目前为止,可以提出一个河网演化的历史全景图。在河网演化初期,高斯分布导致河网的发展过程,揭示了河网的河道在发展过程中的无序行为。丧失高斯分布的特性标志着河网从无序到有序分布的出现。最后,幂律分布的建立相当于早期的河网已经发展成为有序、自组织态,也揭示它已经变成发达的或者成熟的河网。

图2-2重新画其双对数图可给出河道长度的概率密度的标度,

$$p(l,t) \propto l^{-\eta} \quad (t=20) \quad (2-29)$$

并根据累积概率的导数,我们有相同的结果,

$$p(l,t) = \frac{d}{dl} p(\geq l) \propto l^{-(1+\beta')} \quad (t=20) \quad (2-30)$$

理论上,只要河网发展到成熟状态,那么 $\eta=1+\beta'$ 始终成立。

2.4 流域面积概率分布

在河网的发展过程中,随着河道的延伸流域面积扩大。如上所述,当它已经发展成为成熟的河网,标度规律支配河长分布被建立。通过上述类似的标度规律也可以建立流域面积的分布。换句话说,在统计意义上建立了河流长度和流域面积之间相对稳定的关系。从实证的角度来说,Hack定律可以担当流域面积和河道长度之间的关系。这种关系被引入河长分布和流域面积分布的转换函数^[23]。用同样的方法定义相同的转换函数,

$$f(l,a) = \delta(l - a^\gamma) \quad (2-31)$$

通过如下的积分,我们就可以得到流域面积的累积概率,

$$p(a,t) = \int p(l,t) f(l,a) dl \quad (t \geq t_c) \quad (2-32)$$

$$= \frac{a^{-\kappa\gamma}}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-M\kappa a^{(\kappa-1)\gamma} t + D\kappa(2\kappa-1)a^{2(\kappa-1)\gamma} t - \frac{(a^{(1-\kappa)\gamma} - Mt + D\kappa a^{(\kappa-1)\gamma} t)^2}{4Dt}\right)$$

这里 t_c ($t_c=17$)表示河流网络发展成为一个成熟网络所需的时间。与前面讨论过的流域面积的累积概率分布相比较,对方程(2-32)从 a 到无穷大的积分,可得,

$$p(\geq a) = \int_a^\infty p(a,t) da \quad (t \geq t_c) \quad (2-33)$$

图2-5描述的是在 $t = 20$ 时的结果, 表明了流域面积的累积幂律分布,

$$p(\geq a, t) \propto a^{-\alpha'} \quad (t = 20) \quad (2-34)$$

这里当 $\gamma = 0.7$ 时, $\alpha' = 0.43$, 与实际考察值非常一致^[23], 在第一节中提到的广义实证考察取值 (0.41, 0.45) 之内。然而, 在初始阶段, 河长的高斯分布概率持续时间比流域面积持续时间更长。这个事实, 可能是由于它横向和纵向延伸决定了流域面积分布的无序比河长的更早。

用类似的方法从累积概率得到概率密度函数, 即方程(2-34)对 a 求导就可以得到流域面积的幂律分布。也可以从方程(2-32)直接得到。

现在我们回答在第一节中提出的问题。河长的概率分布是含时分布。在初始阶段, 是由高斯分布所支配, 之后, 被具有由单峰和对称性破缺特性的类高斯分布所取代。这种分布逐渐远离高斯分布, 最后转变成了幂律分布。对于流域面积分布而言, 我们以类似的方式猜测它的时间依赖性, 显然, 时间 t 是它广义指数幂分布的特征参数。当 $t \rightarrow 0$ 时, 广义指数幂分布就趋向于高斯分布, 然而, 当 $t \geq t_c$ 时, 广义指数幂分布变成了经典的幂律分布(可能是 $t \rightarrow \infty$ 的极限形式)。

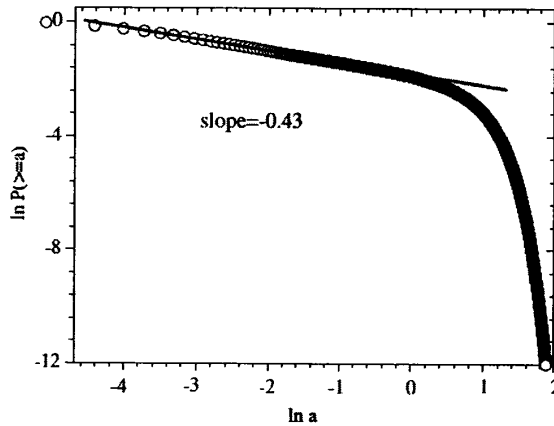


图2-5 流域面积的累积概率的标度规律

2.5 总结与讨论

在本章中, 我们建立了河网初期演化过程中, 河道延伸的随机动力学过程的广义郎之万方程。确定项是源自于侵蚀规律, 而随机项由于随机降雨量、集雨面积、地质情况和河道参数(宽度和深度)等共同决定的。这个方程可以转变成Fokker-Plank方程来描述河长的概率分布。Fokker-Plank方程的含时解可以写成幂函数和指数函数的乘积形式, 被称作是广义指数幂分布。它表明了, 在初始发展过程中河长分布的转变。开始是高斯分布, 之后, 高斯分布逐渐变形, 使其对称性破缺(在这个过程中, 分布曲线的左边逐渐被蚕食)。最后, 转变成了一个带有尾巴的幂律分布。

应用在统计意义上的河道长度和流域面积的关系——Hack定律, 我们可以从标志成熟河道或者已经发达的河道的河长幂律分布得到流域面积分布。对于河道长度分布的幂指数得到一个合理的值, 流域面积分布的结果也是一个合理的取值范围。

就它的意义而言, 这里的幂律分布是河网成为有序相、自组织态的标志, 而类高斯分布是河网从无序趋向有序相的标志性代表。尤其值得注意的是, 高斯分布揭示演化的初始阶段, 河网可能是完全随机和无序的。特别重要指出的是上述那些结果揭示了河网的流域面积和河道长度的幂律分布是动力学演化的确定性和随机性共同作用的结果。依据这样的观点, 随机性和确定性是自然界中无标度几何的一般动力学根源^[40]。就此而言, 统计动力学的方法是描述广义Langevin方程和Fokker-Planck方程, 实际上是在复杂科学的非还原论范式。这种方

法可能是应用于譬如材料表面的裂纹传播过程、煤油和柴油的形成、在多孔介质中分形孔隙网络的增长等等各种系统的动力学考察。这些系统的普遍特性是开放性、自组织、无标度和远离平衡。

这个研究揭示了河道长度的幂律分布和流域面积带有尺度偏离尾部,很多科学家做了很好的研究^[23,34,47]。这种偏差是由于传统的有限尺度效应引起的样本数量减少。像广义指数幂分布截断的性质,我们可以得出一个结论,长偏离尾是河网的一个固有性质。依据Hack定律的偏差,Dodds和Rothman阐述了小尺度偏差是由于河道长度和流域面积之间的线性关系,而大尺度偏差是由于河网子结构的离散性。幂律的偏差来源于有限尺度效应^[47]。这些理解可能对理论工作和实际统计工作有重要的意义。

第三章 河型转变的动力学研究

3.1 引言

3.1.1 课题研究意义及现状

河流网络蕴藏着丰富的自然资源,也是人类最容易利用的自然资源。为了能充分利用这些自然资源,可以采取工程措施对河流网络加以管理。如,修建水库、引水工程等,以满足现代生活和发展趋势对水利资源日益增长的需求。然而河流网络在造福人类的同时也给人类带来潮汐、洪水等灾害,为了能达到兴利除害目的,我们必须对河型、河床演化规律性及其发展演化趋势做出科学预测。

河网的演化是水流与河床之间相互作用的结果。其内部存在着一种非线性的自洽反馈机制,一方面水流作用在河床上,使河床形态发生变化,如弯曲河道,河道凸出的一侧河床呈现为被冲刷的状态,而凹进的一侧河床被明显抬升,使主河道发生了偏移;另外一方面河床的形变反过来影响水流的运动,如上述河床发生形变使其趋向于窄深,这样水流与河床之间的作用加强,即水流的速度会减小,导致沙粒的沉降路径变短,即出现了淤积现象,这样当河流在不引进外来的驱动时,河床会保持在这种动态平衡的状态。由于水流和河床的相互影响、相互制约、相互促进,使河流永不停息的发展演变进行着自身调整,而影响河流演变的因素复杂多变,因此在现阶段许多河网问题中只能作定性的描述,还无法从理论上定量分析研究,即便是定量分析,也都是凭借经验统计分析的结果,而这样的方法往往缺少普适性。河网是一个开放的、水沙流动或侵蚀导致能量耗散的自组织系统。国内有学者试图利用耗散结构理论去阐述河道形态的演化。河网中某些重要问题还没有一个完全一致的定论、尚有争议,如河流的自组织调控机制,河型成因及转换机制等。

对于冲淤河流通过自身自动的调整可以形成不同的相对比较稳定的不同河型。河型是河流来水来沙条件和河床边界条件诸因子之间的相互作用的产物。到目前,河型主要有:游荡型、弯曲型、顺直型、辫状型等。关于这些河型的成因,诸多文献众说纷纭,归纳起来主要以地貌界限假说、稳态型理论假说、随机理论、统计理论以及耗散结构理论最小值假说等,每一个观点都有它自己的独到之处,但不能被普遍认同。河型在一定的条件可以相互转换,这种形式的转换与河型的成因密切相关。中外很多文献表明河型的转换是建立在某些临界值或突变,但如何确定这种临界值和如何解释这种在临界值上发生的突变现象尚有待我们的研究发现。

3.1.2 理论依据

协同学的研究开始于西德斯图加特大学理论物理学教授 H.Hakan。在 20 世纪 60 年代初他在从事激光理论的研究时,发现激光形成过程是一个典型的非平衡相变。在平衡条件下,原子在各个能级上的分布遵循波尔兹曼分布,即能级越高分布的粒子数就越少,主要以自发辐射为主。然而,当激光系统的控制参量达到一定阈值时,各能级的粒子分布便出现了粒子数反转,因而出现了受激辐射为主的激光过程。这种现象依据平衡态时的分布情况,显然这是远离平衡态的非平衡相变。又因为在不同的条件下,形成的激光具有不同的相变特性,而且不同的过程要遵循不同的激光方程。这引起了 H.Hakan 的注意,他通过对平衡相变的对比,发现所有的非平衡相变都具有一级相变或者二级相变的特性。这些都说明非平衡相变是平衡相变的开拓和发展。而平衡相变只是非平衡相变中的一种特殊情况。通过对各学科不同子系

统中出现非平衡相变的类比发现,他们在非平衡相变过程中遵从相同或者相似的微分方程。得出了相变过程是由子系统之间的协同合作行为所决定的。在 20 世纪 80 年代,他首次提出了协同的概念。抓住了各种相变过程中的主要矛盾和演化过程中的共同规律,总结了一套处理相变过程的数学模型和处理方案。以概率论、随机理论为基础阐明了大量无规事件所遵从的必然规律——主方程。通过对系统的动力学考察,得出了相变遵从基本方程的主要类型:分岔理论,稳定性理论,突变理论。汲取了平衡相变理论中的序参量概念,描述了在演化过程中出现的宏观有序。为了得到序参量,采用了奴役原理。统计学和动力学的有机结合,建立了有序结构的核心——自组织理论。

协同理论汇集了众多学科的特长,形成了处理相变过程的新方法、新思路。它的理论框架于 1977 年正式诞生。已成为描述系统从无序到有序,从有序到有序转变的条件和规律的横断学科。而河网演化过程是一个非平衡相变的过程,如河型转换和河流的冲淤状态的转换等都是从无序到有序或者是从有序到有序的过程,引入协同学理论,用分岔理论、突变理论、混沌理论来解释河网的演化特性,将会有更有趣的现象浮现在眼前。

3.1.3 主要研究内容及创新点

1) 主要内容

第二节主要阐述了协同学理论,从协同系统中方程主要形式:含时微分方程、主控变量的选取、随机性方程的演化,以及非平衡相变及空间的演化,为研究河网这样的开放系统提供了理论基础和处理方法,从序参量方程分析引起系统突变的外界“涨落”的影响效果。

第三节主要讲述广义流原理,以及对应在河网系统中最大广义流,寻找能够反映河型建立与转换形式的非平衡相变的序参量。阐述了河网系统的双临界现象,并从概率的角度分析了,系统在在接近动态平衡时,受到外界驱动,引起系统突变的的状态选择,解释了河网双临界现象的过程。

2) 创新点

① 自然河网是一个完全开放的复杂的动力学系统,时刻都与外界进行着物质和能量的交换,水流与河岸上的物质之间相互作用,使得河道形态在长期的演化过程中,为了适应自然环境作用(水沙过程),依赖自身河岸的地理条件(抗冲性等),作出最优化的选择,形成相对稳定的河道形态。而协同学正是处理这样开放的、自适应的系统,建立序参量方程,并求解出河网的序参量方程及空间的周期或者准周期解,诠释河网在引入不同强度的外界驱动力后,系统的结构由稳定变得不稳定,经过一个自适应过程后,系统重新达到另外一种稳定结构。

② 解释系统在突变后,要寻找另一种相对稳定的结构时,利用 Fokker-Planck 的跃迁几率,获得系统在重新选择新结构时的选择定则。将整个水沙组合分成了三个部分,清水期的冲刷态、淤积态,以及高含沙水域的冲刷态。

3.2 协同学基本理论^[49,51]

实际系统,在处理过程中将其划分为大量的子系统,通过对子系统的特性和行为分析,再加上子系统之间的相互耦合作用,来演绎整个系统的行为。当系统的某些控制参量(边界条件)改变时,不管参量改变方式是特定的还是非特定的,系统都有可能演变为宏观模式上的一种新模型。系统可以从均匀各项同性的静止状态转变为非均匀的一种有序状态,以一定的几率转变为几种可能有序状态中的一种。而转变的几率是由外部和内部的影响因素共同决定,满足能量最低的自然最优选择原则。这样的系统可以在不同稳定状态间转变。而在有序状态中,系统也会受到来自外界的各种驱动力,有可能是周期的涨落,也有可能是准周期的涨落,而实际系统都是一个比较复杂的结构,受到外界的干扰也以准周期为主。系统也有可能经历无规则的运动(混沌),而且在系统中会形成多种空间模式,如波、蜥线或者蜂窝状结构等,他们是依靠系统的能量和物质的动力学方式来维持。总之,我们探讨的是在宏观尺度

上导致定性新结构的各种自组织过程。演变成新结构的机理是什么？用什么样的方式描述从一种状态到另外一种状态的转变？

3.2.1 方程的主要形式

实际问题中绝大部分是由大量的子系统组成复杂系统。而在每个复杂系统中，我们并不是很清楚系统中的每一个子系统所有信息，为了能够掌握子系统的信息，人们大都采用热力学统计、控制理论和信息论为基础的方法，但这些方法在解决远离热平衡的物理系统或者各种经济过程是不妥的，因为从根本上来讲这些方法都是对静态的，归根结底是根据在可能状态上推论的信息理论。协同学以动力学统计为主，避免了只能处理静态系统的局限性。在动力学操作下，集体“模”的增长或衰减率是决定着形成什么样的宏观状态以及是以什么样的过程形成的。在某种意义上讲，集体模式的生长与衰减依靠的涨落，涨落间的相互竞争和最后的最优化的选择导致了最后的宏观状态。显然在这种演化过程中，“时间”参数显得尤为重要。因此我们研究系统的时间规律，处理与时间有关的时间演化方程。

1) 含时微分方程

首先解决随时变化的单变量 q ，这里的 q 可以代替系统中的一个粒子坐标或分子数，用 $\dot{q}$ 来表示 q 对时间 t 一阶导数，即 q 对时间的变化率。在许多情况下，它的变化率与当时系统的状态有关，我们不妨假设问为最简单的情形：

$$\dot{q} = \alpha q \quad (3-1)$$

其中 α 是与 q 和 t 无关的常量。在群体动力学中， q 表示个体的数目。如果我们对(3-1)方程两边同时对时间 t 求导有：

$$\ddot{q} = \alpha \dot{q} \quad (3-2)$$

我们将(3-1)代入(3-2)中，上式变为：

$$\dot{q} = \alpha^2 q \quad (3-3)$$

如果我们令 $\omega^2 = -\alpha^2$ ，就得到了我们常见的振子的最简单微分方程：

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (3-4)$$

ω 是振子的振动频率。

上述的计算是线性方程，而在描述实际系统多数是非线性微分方程，也就是说，子系统之间有耦合，用 q_i 代替一个子系统， q_j 代替另外一个子系统，则上述的(3-1)方程变化为：

$$\dot{q}_i = \beta q_i q_j \quad (3-5)$$

显然，各部分之间的耦合是用非线性项表示的，一般来说，必须讨论几个变量的一组方程。不妨用非线性耦合的线性振子来举例。

首先，可以处理线性耦合的线性振子。对于只有一个变量的线性振子满足(3-4)，即为：

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0 \quad (3-6)$$

其中 x_1 是含时变量， ω 是对应微分方程的本征值，即为本征频率。这样的线性微分方程与另外一个振子进行线性耦合可得到：

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \alpha x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \beta x_1 \end{cases} \quad (3-7)$$

现在引入 Hamiltonian 力学中的动量，作为中间辅助变量 p_1 和 p_2 ：

$$\begin{cases} p_1 = \dot{x}_1 / \omega_1 \\ p_2 = \dot{x}_2 / \omega_2 \end{cases} \quad (3-8)$$

这里主要利用了数学上在求解微分方程中的降价手法，使原来的二阶微分方程变成一阶

微分方程，即将(3-8)代入(3-7)式得：

$$\begin{cases} \dot{p}_1 + \omega_1 x_1 = \alpha / \omega_1 x_2 \\ \dot{x}_1 = \omega_1 p_1 \\ \dot{p}_2 + \omega_2 x_2 = \beta / \omega_2 x_1 \\ \dot{x}_2 = \omega_2 p_2 \end{cases} \quad (3-9)$$

如果我们将上述的方程组中的变量 p_1, x_1, p_2, x_2 写成态矢量的形式，即

$$q = (p_1, x_1, p_2, x_2)^T \quad (3-10)$$

则方程组(3-9)就可变成为：

$$\dot{q} = Lq \quad (3-11)$$

其中 L 是一个与时间无关的 4×4 的系数矩阵，在这里为：

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & \alpha / \omega_1 \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \beta / \omega_2 \\ \omega_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

显然，对于任意个线性耦合的线性振子均可以写成为(3-11)的形式，对应它的解为：

$$q = Ce^{Lt} \quad (3-13)$$

C 是积分常数，上述的解对于 x_i 在空间内对连续变量也是满足的。

那么对于非线性耦合的线性振子，(3-7)式变成为：

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \alpha x_1 x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \beta x_1 x_2 \end{cases} \quad (3-14)$$

用同样的方法引入新变量 p_i ，满足：

$$p_i = \dot{x}_i / \omega_i \quad (3-15)$$

代入(3-14)方程组得：

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\omega_1 x_1 + \alpha / \omega_1 x_1 x_2 \\ \dot{x}_1 = \omega_1 p_1 \\ \dot{p}_2 = -\omega_2 x_2 + \beta / \omega_2 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = \omega_2 p_2 \end{cases} \quad (3-16)$$

为了能和线性耦合的线性振子方程组一样，用态矢量来表示，首先要处理非线性耦合项，即将 x_1 和 x_2 的乘积项分开，变成 x_1 和 x_2 独立的项。这里采用坐标变换，不妨假设

$$b_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix} \quad (3-17)$$

对应在上述方程组中， $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}$ ，那么就有

$$b_i = x_i + ip_i \quad (3-18)$$

将此式两边对时间微分，得：

$$\dot{b}_i = \dot{x}_i + i\dot{p}_i \quad (3-19)$$

将(3-16)方程组代入(3-19)得

$$\dot{b}_1 = -i\omega_1(x_1 + ip_1) + i\frac{\alpha}{\omega_1}x_1x_2 \quad (3-20)$$

又由于

$$\begin{cases} b_1 = x_1 + ip_1 \\ b_2 = x_2 + ip_2 \end{cases} \quad (3-21)$$

所以

$$\dot{b}_1 = -i\omega_1 b_1 + i\frac{\alpha}{4\omega_1}(b_1 + b_1^*)(b_2 + b_2^*) \quad (3-22)$$

假设 b 的形式解为:

$$b_i = r_i e^{-i\varphi_i} \quad (3-23)$$

(其中 r_i, φ_i 是 t 的实函数, 而 r_i 代表径向, φ_i 代表相位角)将其代入(3-22)式得:

$$\dot{r}_1 e^{-i\varphi_1} - ir_1 \dot{\varphi}_1 e^{-i\varphi_1} = -ir_1 e^{-i\varphi_1} + i\frac{\alpha}{4\omega_1}(r_1 e^{-i\varphi_1} + r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{-i\varphi_2} + r_2 e^{i\varphi_2}) \quad (3-24)$$

将上式方程两边同时除以 $e^{-i\varphi_1}$ 后变为:

$$\dot{r}_1 - ir_1 \dot{\varphi}_1 = -ir_1 + i\frac{\alpha}{4\omega_1}(r_1 + r_1 e^{i2\varphi_1})(r_2 e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} + r_2 e^{i(\varphi_2 + \varphi_1)}) \quad (3-25)$$

然后利用 $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ 将(3-25)式中的指数部分展开, 得

$$\dot{r}_1 - ir_1 \dot{\varphi}_1 = -ir_1 + i\frac{\alpha}{2\omega_1}r_1 r_2 (1 + \cos(2\varphi_1) + i\sin(2\varphi_1))(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)) \quad (3-26)$$

化简后得

$$\dot{r}_1 - ir_1 \dot{\varphi}_1 = -\frac{\alpha}{2\omega_1}r_1 r_2 \sin(2\varphi_1)\cos(\varphi_2) - i(r_1\omega_1 - \frac{\alpha}{\omega_1}r_1 r_2 \cos^2(\varphi_1)\cos(\varphi_2)) \quad (3-27)$$

将实部和虚部分离, 得

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = -\frac{\alpha}{2\omega_1}r_1 r_2 \sin(2\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ \dot{\varphi}_1 = \omega_1 - \frac{\alpha}{\omega_1}r_2 \cos^2(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \end{cases} \quad (3-28)$$

同理可得 $i = 2$ 径向和相位角的微分方程。如果将上述的方程组也写成态矢量的形式, 则有,

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \varphi, \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = r, \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \omega \quad (3-29)$$

那么就得到一般的微分方程:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = w + f(r, \varphi) \\ \dot{r} = g(r, \varphi) \end{cases} \quad (3-30)$$

由(3-30)中的第一个方程可以表明, 在最低的近似中, 右边的非线性项的效应是一个频率移动。因此只要出现振子间的非线性耦合, 那么就一定预示着频率的偏移或者出现进一步的效应。

2) 控制参变量

协同系统存在着可以控制系统发展的外参量, 主要依赖从外界流入的能量或者物质来驱动系统离开热平衡状态。可以通过改变外部环境来控制系统。但当保持这些外部控制参量在短时内不变时, 就可以在方程中用称为控制参量的一定常参量表示他们的影响。方程(3-1)中的 α 就是这样的参量。而在方程中 α 是控制状态参量 q 的主要因素: 当 $\alpha < 0$ 时, 状态

参量 q 是随时间成指数衰减；当 $\alpha > 0$ 时，状态参量 q 是随时间成指数增长的；再当 $\alpha = 0$ 时，状态参量是一个不随时间变化的绝对平衡态。

在这里我们扼要讨论一下怎样检验控制参变量的变化是否能引起系统结构的不稳定性。举一个简单的例子说明它的主要思想。小球在瓶子中的滑动。

描述小球在瓶子中滑动的微分方程为，

$$\dot{q} = -\alpha q - \beta q^3 \quad (3-31)$$

方程中的 $\beta > 0$ ，而式中只有一次和三次项的原因是由于粒子在瓶中运动是一个对称结构，如果引入二次项，对称性破缺。对应势函数解得形式为，

$$V(q) = -\frac{\alpha q^2}{2} - \frac{\beta q^4}{4} \quad (3-32)$$

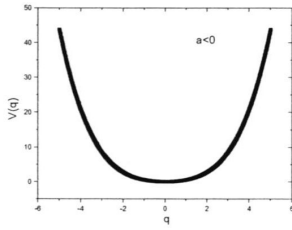


图 3-1 $\alpha < 0$ 时，势函数的图像

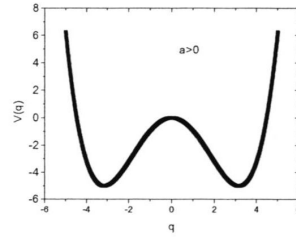


图 3-2 $\alpha > 0$ 时，势函数的图像

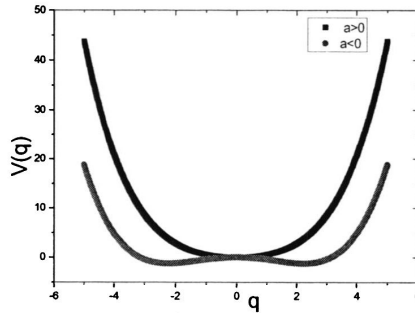


图3-3 $\alpha > 0$ 与 $\alpha < 0$ 势函数图像的对比

从上述图像中可以发现， $q = 0$ 点不是稳定点。不是所有的势函数都有上述的图像，因此我们采用线性稳定性分析。引入一个含时的小偏差 u ，把(3-31)方程的解 q 写成为

$$q = q_0 + u \quad (3-33)$$

上述提到的稳定点 $q_0 = 0$ ，所以上式变成为，

$$q = u \quad (3-34)$$

将此式代入(3-31)，只保留一阶项可得，

$$\dot{u} = -\alpha u \quad (3-35)$$

对应的解为

$$u(t) = u(t_0)e^{-\alpha t} \quad (3-36)$$

当 $\alpha < 0$ 时， $u(t)$ 以指数增长， $q_0 = 0$ 的状态是一个不稳定点。现在我们想说明的是 q_0 点进入不稳定状态时，选择进入哪一种新的状态的问题，因此提出了两个协同学的概念：序参量和伺服概念。用两个方程进行说明。

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \lambda_1 q_1 - q_1 q_2 & (1) \\ \dot{q}_2 = -\lambda_2 + q_1^2 & (2) \end{cases} \quad (3-37)$$

现在假定 λ_1 很小，只要 q_1 和 q_2 是小量，当 q_1 变化很慢时，由上式的(2)式表明， q_2 是由

q_1^2 来支配。如果 q_1 变化很慢, 可想而知 q_2 也变化很慢。如果 λ_2 为正且远大于 λ_1 时, 则 $\dot{q}_2$ 变化可以忽略, 即有

$$q_2 \approx q_1^2 / \lambda_2 \quad (3-38)$$

代入方程(3-1)后可以直接求解, 这种方法称为绝热近似。也就是说, 我们应该寻找一个变量支配系统中的其它很多变量时, 我们只需一个 q_1 的方程来代替 q 其它方程。我们把这样的 q_1 称为序参量, 当然实际的情况会困难些, 可能与含时系数和各种涨落力有关, 因此寻求这样的一个变量尤为重要。丧失线性稳定性、序参量、伺服原理的有效性之间存在着内在的联系。即当改变控制参量时, 系统可能会丧失线性稳定性。

3) 随机性方程

协同再一个特性是具有随机性, 对于系统的时间演化, 不能绝对依赖于演化过程准确预言的主要原因。而引起这些不准确的原因可以归因于“涨落”力 $F(t)$, 方程(3-1)中方式引入最简单的涨落力, 则有

$$\dot{q} = \alpha q + F(t) \quad (3-39)$$

涨落力的引入往往会使问题富有了哲学性, 但这里采用较为实用的观点, 即假定在研究的系统中涨落力是给定的。如果我们一旦知道系统的初始状态, 就可以确切预测系统在未来一段时间的大致演化情况, 即如果知道系统中所有粒子的位置和速度以及它们之间的相互作用, 就可以预测粒子的未来, 以此形成了三种观点。

① 统计力学

虽然粒子的状态从原则上是可以预测, 但实际人们并不想作这种预言, 因为这种预言是不确切的。而用统计学就足以描述如气体无规则运动的系统。也就是说我们来预测粒子在某个空间对应时刻出现的几率大小。例如, Brownian 运动, 在研究它的粒子分布情况时, 利用概率的观点。如果采用概率的观点, 就会出现各种涨落, 如, 粒子与粒子之间的随机碰撞, 因此, (3-39)式中的 $F(t)$ 就是这里的随机碰撞作用。每当我们从微观描述转换到宏观描述时, 就出现了涨落, 例如, 我们经常不用分子的位置, 而是用分子的局部密度和局部速度来描述。

② 量子涨落

随着量子理论的出现, 人们发现从理论上要做出绝对肯定的预测是不可能的。其中 Heisenberg 测不准原理, 表明同时绝对准确地测量一个粒子的速度和位置是不可能的。由于量子理论是物质世界的基础, 那么量子涨落就必然会引起测不准关系。如果要从微观世界放大到宏观尺度的场合, 还能比较合理的描述这个事件, 量子的涨落会显得特别重要。

③ 混沌

随着科技的发展, 人们掌握复杂系统的信息量更全面, 发现在没有量子涨落时也不能预测系统未来的演化方向。虽然描述时间演化的方程是纯确定性的, 而系统的未来发展却可能会经过完全不同的路径。因为某些系统对初始条件比较敏感。

对于一个随时间 t 变化的单变量 q , 在连续的时间序列以外, 选择一组离散的时刻 t_i , 为了简单起见, 取时刻 t_i 在具有相同的时间间隔, 即 $\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_{i+1} - t_i \dots$ 其中 $i = 1, 2, 3 \dots$ 。则当系统从 t_{i-1} 的状态迁到 t_i 时刻的状态, 则 q 的变化情况为,

$$\Delta q(t_i) = q(t_i) - q(t_{i-1}) \quad (3-40)$$

状态 q 的变化一般是由该变量的宏观力或者相干力 K 以及在相对的时间间隔 Δt 内出现的附加涨落力引起的。而相干驱动力和涨落力的作用可写成为

$$\Delta q(t_i) = K[q(t_i)]\Delta t + \Delta\omega(t_i) \quad (3-41)$$

其中 $\Delta\omega(t_i) = \omega(t_i) - \omega(t_{i-1})$, $K[q(t_i)]$ 是过程中的相干驱动力, $\omega(t_i)$ 是过程中的涨落力。因为, $\Delta\omega$ 表示微观过程对宏观过程 q 的作用, 而 $\Delta\omega$ 是依赖于大量自由度的。像这样具有诸多变量的系统, 引入统计平均的两个性质:

① 假设 $\Delta\omega$ 的平均值为零, 即

$$\langle \Delta\omega(t_i) \rangle = 0 \quad (3-42)$$

否则 $\Delta\omega$ 会含有以相干方式作用的部分。

② 假定涨落发生在很小的时间尺度上。当我们讨论在不同时刻 t_i 和 t_j 的 $\Delta\omega$ 之间的关联函数时, 假定两时刻的涨落之间无关联, 因而有

$$\langle \Delta\omega(t_i)\Delta\omega(t_j) \rangle = \delta_{i,j} Q\Delta t \quad (3-43)$$

其中 Q 是涨落的量度。而 Δt 是为了从 Brownian 运动的特殊情况定义涨落力。为了能够更清楚的说明这个问题, 不妨假设,

$$K = 0 \quad (3-44)$$

即没有相干驱动力, 在这种情况下, 方程(3-41)两边对 t_i 求和, 可得到

$$\sum_i q(t_i) - q(t_{i-1}) = \sum_i \Delta\omega(t_i) \quad (3-45)$$

即为

$$q(t) - q(t_0) = \sum_i \Delta\omega(t_i), t - t_0 = N\Delta t \quad (3-46)$$

用 t 表示最后时刻, 初始时刻的状态量 $q(t_0) = 0$, 于是对(3-46)方程两边求平均可得,

$$\langle q(t) \rangle = \left\langle \sum_i \Delta\omega(t_i) \right\rangle = \sum_i \langle \Delta\omega(t_i) \rangle \quad (3-47)$$

引用统计学的第一性质, 可知 $\langle \Delta\omega(t_i) \rangle = 0$, 即

$$\langle q(t) \rangle = 0 \quad (3-48)$$

在概率论中, 描述一个事件的波动情况时, 一般采用求平均来描述系统的涨落情况是不完全的, 也就是说 $\langle q(t) \rangle = 0$, 不意味着系统完全没有波动。因此, 采用均方差来衡量, 避免了上述的不足, 即我们现在对状态量 q 的平方求平均, 有

$$\langle q^2(t) \rangle = \sum_i \sum_j \langle \Delta\omega(t_i)\Delta\omega(t_j) \rangle \quad (3-49)$$

将(3-43)代入上式有

$$\langle q^2(t) \rangle = \sum_i \sum_j \delta_{i,j} Q\Delta t = Q \sum_i \Delta t = Qt \quad (3-50)$$

从上式我们可以得到, 一个作 Brownian 运动的粒子的一个状态量随着时间的增加呈线性增加。而在时间系统中, 涨落 $\Delta\omega$ 往往与变量 q 一起作用, 即状态量变化的方程便成为,

$$\Delta q(t_i) = K[q(t_i)]\Delta t + g(q)\Delta\omega(t_i) \quad (3-51)$$

对于 $g(q)$ 中的变量 q 取那一时刻比较合适, 选择不同时刻意味着将得出不同类型的过程, 因此不能随便取这个时刻。在这里 $\hat{I}to$ 和 Stratonovich 提出了两种时刻。

$\hat{I}to$ 提出的状态变量 q 在时刻 t_{i-1} , 即

$$g(q)\Delta\omega(t_i) = g(q(t_{i-1}))\Delta\omega(t_i) \quad (3-52)$$

因为涨落 $\Delta\omega$ 仅发生在已经实现的 t_{i-1} 的状态量 q 之后, 也就是说, $q(t_{i-1})$ 和 $\Delta\omega(t_i)$ 是不相关的, 就得到

$$\langle g(q(t_{i-1}))\Delta\omega(t_i) \rangle = \langle g(q(t_{i-1})) \rangle \underbrace{\langle \Delta\omega(t_i) \rangle}_{=0} = 0 \quad (3-53)$$

由于这种选择并不能很好的反应实际过程, 反而至始至终都存在着涨落。因此, Stratonovich 提出第二种选择定则, 状态变量 q 取在时刻 t_{i-1} 和 t_i 的中间时刻点, 有

$$g(q)\Delta\omega(t_i) = g(q(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}))\Delta\omega(t_i) \quad (3-54)$$

这种方法的优点是: 可以按照微分方程的常规运算来作变量代换。

3.2.2 非平衡相变及空间的演变

在非线性随机微分方程中,要对其做一个普适的分析几乎是不可能的,因为它描述的是一种完全开放的而且变量极其多的复杂系统。因此想在协同学领域中寻找求解复杂系统所具有的普遍特征。为什么某些系统的宏观性质的临界点发生不定向的偏移?而有些系统会随着时间受到不同的外界驱动力,它的发展趋势又是什么样的?我们从非平衡相变和空间演化两方面来阐述这些问题。

1) 非平衡相变

之前,讨论的问题忽略了涨落对系统的冲击,然而涨落会引起系统改变宏观状态的临界值。根据理论物理的基本定律,当系统在不同的环境下发生结构耗散时,必定会引起系统某些量的涨落,至少在接近临界值的系统是这样,合理的处理系统受到的涨落,是热平衡系统中长期存在的问题,也是一个很棘手的问题。在远离热平衡的系统以及其不稳定性问题,我适当引入涨落来求解序参量的问题,换句话说,就是涨落把分岔现象和问题变成非平衡相变的问题了。

为了能更深入的了解涨落在演化过程中所起的作用,先看图 3-1 和图 3-2 所示,系统的状态从一个稳定结点转变到两个稳定结点和一个不稳定结点。在外界有干扰的时候,即有噪声时,即使在定态,系统内的点 $q(t)$ 都会始终保持着不确定的次序做前后运动。因此我们只能统计的概念来描述在一个单位体积元 $dV = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ 中找到态矢量 q 的几率大小。我们用 $F(q, t)$ 代表空间几率,而几率与势函数之间的关系为

$$F(q) = e^{-V(q)} \quad (3-55)$$

由此我们可以得到势函数和几率与态矢量之间的图像如图 3-4、图 3-5 所示,

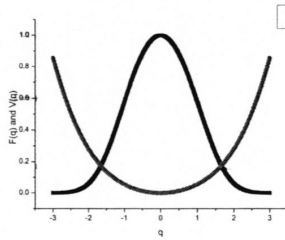


图 3-4 $\alpha < 0$ 势函数和概率曲线图

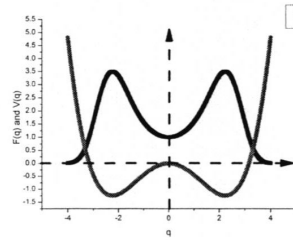


图 3-5 $\alpha > 0$ 势函数和概率曲线图

从上述分布函数的变化曲线可知,在极值处函数的图像会发生明显突变,即系统在接近这些转变点时,序参量的涨落幅度会明显增大(临界涨落)。在双峰处出现的几率比较大。系统在噪声作用下的另一个特征是,在初始状态 $q = q_0$ 或者在它的邻域内测量系统,但涨落会驱使系统离开初始状态,到达另外一个状态 q_1 ,这个转移过程需要多长时间,相对分布函数而言,就是从一个极值到达另外一个极值所需要的时间,把这个跃迁所需要的时间称为第一推移时间。因此把新状态下解的形式可写为,

$$q = r(t)e^{i\omega t + i\varphi(t)} \quad (3-56)$$

其中 r 代表振幅, φ 代表相位, ω 代表涨落的频率。而上式中 $r(t)$ 是系统在涨落作用下在 r_0 附近的波动, ωt 是相位的平移量。而这里需要确定的是 r 的弛豫时间和相位扩散系数 ω ,只要能清楚地找到这两个量,系统被涨落的影响就可以解决了。与噪声有关的其它现象是锁频状态的破裂问题。噪声会不断的驱使系统离开初始的状态。以一个简单的例子来说明。受到涨落的系统的一般方程为

$$\dot{q} = N(q, \alpha) + F(t) \quad (3-57)$$

现在假定 F 很小,可以忽略,因此方程就变成为,

$$\dot{q} = N(q, \alpha) \quad (3-58)$$

在控制参量 α 的给定范围内有解,所以研究 $q_0(\alpha, t)$ 的稳定性, 设

$$q = q_0 + w \quad (3-59)$$

代入(3-58)式推出波动量的线性方程为,

$$\dot{w}_k = Lw_k \quad (3-60)$$

对应的形式解为,

$$w_k(t) = e^{\lambda t} v_k(t) \quad (3-61)$$

将伺服原理应用到 Langevin- $\hat{I}$ to 的随机模型中, 可得到序参量方程为,

$$\dot{w} = \lambda w - \beta w^3 + F(t) \quad (3-62)$$

假定涨落力满足,

$$\begin{cases} \langle F(t) \rangle = 0 \\ \langle F(t)F(t') \rangle = Q\delta(t-t') \end{cases} \quad (3-63)$$

当 $\lambda < 0$ 时, 系统处于一个比较稳定的状态, 那么 w 就是一个小量, 那么 w^3 就是一个高阶无穷小量, 因此上述序参量的方程变为,

$$\dot{w} = \lambda w + F(t) \quad (3-64)$$

当 $\lambda > 0$ 时, 作一个代换,

$$w = w_0 + \eta \quad (3-65)$$

其中 $\lambda - \beta w_0^2 = 0$, 代入(3-62)得,

$$\dot{\eta} = -2\lambda\eta + F(t) \quad (3-66)$$

现在只需求解上式即可, 其解的形式为,

$$\eta = \int_0^t e^{-2\lambda(t-\tau)} F(\tau) d\tau \quad (3-67)$$

同理可有,

$$\begin{aligned} \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= \iint \exp[-2\lambda(t-\tau) - 2\lambda(t'-\tau')] F(\tau) F(\tau') d\tau d\tau' \\ &= \iint \exp[-2\lambda(t-\tau) - 2\lambda(t'-\tau')] Q\delta(\tau-\tau') d\tau d\tau' \\ &= \int \exp[-2\lambda(t+t') + 4\lambda\tau] Q d\tau \\ &= \exp[-2\lambda(t+t')] \frac{Q(\exp[4\lambda t] - 1)}{4\lambda} \\ &= \frac{Q}{4\lambda} e^{-2\lambda|t-t'|} \end{aligned} \quad (3-68)$$

它对 $t \geq t'$ 都成立。

当接近不稳定点 $\lambda = 0$ 时, 线性化的步骤便失效了。当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上述关联函数是发散的, 在相变理论中, 这个效应被称为“临界涨落”。但对于远离热平衡的物理系统, 这种涨落会受到限制, 即是由上述的非线性项 $-\beta w^3$ 引起的, 考虑这一项, 利用 Fokker-Planck 方程来求解。而假定随机涨落 $F(t)$ 满足 Gaussian 型分布。所以几率密度的 Fokker-Planck 方程可写为

$$\dot{f} = -\frac{\partial}{\partial w} [(\lambda w - \beta w^3)f] + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} f \quad (3-69)$$

对(3-69)式利用傅里叶积分变换可得其形式解为

$$f = N \exp\left[\frac{2}{Q} \left(\frac{\lambda w^2}{2} - \frac{\beta w^4}{4}\right)\right] \quad (3-70)$$

现在, 总结求解方程所采取的步骤: 第一步可以忽略涨落力, 求解接近不稳定点的系统,

这是系统一般是由几个序参量支配,利用伺服原理消去伺服变量,便得到了含有涨落力的序参量方程。这种序参量方程可以利用 Langevin 方程,而这些方程一般是非线性方程,在接近不稳定的点时,略去非线性项,把相应的 Langevin 方程变为 Fokker-Planck 方程,然后进行求解。

2) 空间的演变

之前分析系统在时间特性上的定性变化。但在许多物理、化学和生物中,我们不可以忽略系统的变量随空间的变化。例如在流体力学中,系统出现了几种宏观空间模式。先从空间的均匀状态模式分析。由线性稳定性分析可知,在一些控制参量值时,均匀解就变成不稳定的了。因而,我们对微分方程作如下求解:

$$\dot{w} = Lw \quad (3-71)$$

在这里 L 含有空间微商。现在讨论 L 的性质,我们不妨假设 L 的形式为,

$$L = L_0 + D\Delta \quad (3-72)$$

其中 L_0 是一个常数矩阵,而通常是控制参量 α 函数,要求 D 是一个常数对角矩阵,由之前的解得形式的假设,即可写成为: $w(x, t) = e^{\lambda t} v(\bar{x})$, 将其代入(3-71)有,

$$(L_0 + D\Delta)v(\bar{x}) = \lambda v(\bar{x}) \quad (3-73)$$

在给定 $v(\bar{x})$ 的边界条件下,就可以从方程(3-73)中求解出一组特征值 λ_i 对应空间模式的本征解 $v_i(\bar{x})$ 。当改变 α 值,即改变矩阵 L_0 时,对应的特征值 λ_i 中的一个或者几个变成虚数,这使它们的模式变成了不稳定的了。对应序参量的方程和态矢量的方程,可假设态矢量的解为,

$$q(\bar{x}, t) = q_0(\bar{x}, t) + \sum_i \xi_i(t) v_i(\bar{x}) \quad (3-74)$$

确定在 $\text{Re}\{\lambda_i\} \geq 0$ 对应的序参量 ξ_i , 利用消去原理或者伺服原理就可以建立序参量方程。只保留前几项,这样就可以得到演化模式的构架。如果有一个变量时,其模型为,

$$q(\bar{x}, t) = c + \xi_1(t) v_1(\bar{x}) \quad (3-75)$$

得到,当 $\lambda_1 < 0$, 只有一个零解,即态矢量的解为,

$$q(\bar{x}, t) = c \quad (3-76)$$

态矢量为常量,也就是说系统是处于均匀分布,是一个稳定状态;当 $\lambda_1 > 0$ 时,有非零解,所以态矢量解的形式为,

$$q(\bar{x}, t) = c + \sum_i \xi_i(t) v_i(\bar{x}) \quad (3-77)$$

此为空间非均匀解,但要说明的是,在不同的线性理论下,序参量方程不能随便选取的,是由伺服原理及消去理论共同决定的。现在说说空间模式的一般求解过程如下:

在(3-72)方程的形式中, L 被称作是 Frechet 微商,如果前面提到的 N 是 q_i 的泛函,则矩阵 L 的分量由泛函的微商给出:

$$L_0 = \left. \frac{\partial N}{\partial q_i} \right|_{q_i=q_0} \quad (3-78)$$

所以对于(3-71)方程的形式解可设为,

$$w(\bar{x}, t) = w_1(t) \chi_k(\bar{x}) \quad (3-79)$$

其中 $\chi_k(\bar{x})$ 满足如下方程,

$$\Delta \chi_k = \lambda'_k \chi_k \quad (3-80)$$

在给定的边界条件下,可以变为,

$$\dot{w} = (L_0 + D\lambda'_k) w \quad (3-81)$$

这代表一组常系数耦合线性的常微分方程,其通解得形式为,

$$w_1 = e^{\lambda'_k t} v_k(x, t) \quad (3-82)$$

现在讨论, q_0 依赖于空间坐标 x 。对于这种问题一般不容易求解, 在绝大多数情况下, 依靠计算机。但在现实系统中, 这种问题是普遍存在的, 因此这种问题的处理是不可避免的。假定 $q_0(x)$ 是 x 的周期函数, 其周期为,

$$(a_1, a_2, a_3) \quad (3-83)$$

如果 N 与 $\bar{x}$ 无关, 则 $L(\bar{x})$ 与 $q_0(\bar{x})$ 具有相同的周期性, 根据假设 $w = e^{\lambda t} v(\bar{x})$, 可将方程变换为,

$$L(q_0(\bar{x}), \Delta, \alpha) v(\bar{x}) = \lambda v(\bar{x}) \quad (3-84)$$

因为 $L(\bar{x})$ 是 $\bar{x}$ 每个分量的周期函数, 因此 $v(x)$ 的一般形式为,

$$v(x) = e^{ik \cdot x} z(x) \quad (3-85)$$

其中 k 是一个实矢量, 而 z 是周期为 (a_1, a_2, a_3) 的周期函数。所以有,

$$q(\bar{x}, t) = q_0(\bar{x}, t) + \sum_i e^{\lambda_i t} e^{ik \cdot \bar{x}} z(\bar{x}) \quad (3-86)$$

此式便是空间演化方程的解形式。

3) 本节小结

在物理学中, 协同学经常与热力学联系到一起。而热力学的一个主要特点就是它的普适性, 它主要应用于不同成分组成的各种形态的物质。热力学通过研究可观测量, 因此它适用于大量分子的集合, 而不能应用到每一个分子上。信息理论则采用了一套相近的方法, 试图得到仅仅有限的信息量却对系统做出准确的预测(无偏见的预测)。还有一些物理学家则认识到了协同学和不可逆热力学的共性: 研究驱离热平衡的复杂系统。协同学中的各种宏观转变和热平衡系统的相变之间也有类似性质, 如临界涨落、临界慢降和对称破缺。统计力学为我们提供了分析相变的方法中所处理涨落的合适路径。典型方程(Langevin 方程、Fokker-Planck 方程和主方程)在协同学中的应用。解释了网络、正负反馈和非线性振荡等问题。

动力学理论和协同学两者都是研究系统随时间的演化方程。而协同学着重研究系统动力学(或者静态)的定性变化, 特别是分岔点处的定性变化。

上述协同学与其它学科间的联系, 我们知道它是一门综合性的学科。在处理问题过程中, 虽然保留了宏观变量概念的重要性, 然而在引入序参量这些变量与热力学中的那些宏观变量的实质是完全不同的。当热力学借助信息论实现量化时, 差别就比较明显, 换句话说就是信息论和热力学是静态方法, 而协同学探讨的是动力学行为。

协同系统的非平衡相变比热平衡系统的相变丰富的多, 而且包括空间结构、各种振荡和混沌。在处理热平衡系统相变时, 通常令样品的体积趋于无穷大。而在绝大部分非平衡相变中, 样品的几何条件在对系统产生不同的结构上却起着决定性的作用。但协同学还提出了另外的一些见解。不仅在完全不同的基底上实现协同过程, 而且协同学还涉及了空间分布的介质以及相变的概念。在控制论中, 每一个程序都是为控制某种动作而设计, 因而系统以指定的方式运行。然而在协同学中, 是以一种非指定的方式改变种种控制操作, 尽量研究系统的自组织性, 也就是在新施加的控制作用下系统将要获得的各种状态。

3.3 广义流原理在河网中的应用

广义流原理用来描述系统结构形成复杂系统的物理学原理^[50, 52]。它主要研究远离平衡态的复杂开放系统, 组元之间如何寻求一种最优化过程, 使得系统在给定的约束条件下, 从外界获得的广义流最大。河流是一个完全开放的系统, 时刻都与外界进行着物质和能量的交换, 水流与河床河岸物质之间的相互作用使得河道在长期的演化过程中为适应环境作用(水沙过程), 依据自身河床河岸的地质地理条件(抗冲性等), 做出的一种最优化的选择, 形成一种相对稳定的河型。它是如何适应和选择环境对它的影响, 使其自身处在一个相对稳定的状态。

3.3.1 广义流理论

对于一个复杂开发系统,其往往是非线性、多因子、多变量、相互不独立或者非正态分布的,而子系统之间存在着复杂的强非线性相互关联或耦合的宏观表现。由于复杂系统是一个远离平衡态的开放系统,其微量是吸取周围环境中的能量和物质等相互耦合下成形、长大,而流的作用完全可以体现在组元之间的非线性相互作用和自身演化上。现在,假设复杂系统的各个组元受到的驱动力表示为 $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$, 表示成一个矢量为: $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$, 类似于经典统计理论,所有可能的微观态组成一个连续的 Γ 空间, $d\bar{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ 是 Γ 空间的单位体积元。在 t 时刻, 存在于单位体积元 $d\bar{x}$ 上的态几率为^[48,49,52,58,60],

$$\rho(\bar{x}, t) d\bar{x} \quad (3-87)$$

而 $\rho(\bar{x}, t)$ 代表空间中的分布函数, 满足概率的归一化条件, 即,

$$\int \rho(\bar{x}, t) d\bar{x} = 1 \quad (3-88)$$

定义广义流为: J 是几率分布的函数。当系统的状态处于 t 时刻单位体积 $d\bar{x}$ 上所有可能微观态的累积, 即为平均广义流, 可写成为,

$$\bar{J} = \int \rho(\bar{x}, t) J(\rho) d\bar{x} \quad (3-89)$$

那么, 对于一个离散的系统, 可以将上述连续的积分过程变换成如下形式,

$$\sum_s \rho_s(t) = 1 \quad (3-90)$$

同样对于离散系统的平均广义流可写成为,

$$\bar{J} = \sum_s \rho_s(t) J(\rho_s) \quad (3-91)$$

当外界驱动力引入如下的约束条件:

$$\begin{cases} \langle x_i \rangle = f_1 \\ \langle x_i x_j \rangle = f_2 \\ \langle x_i x_j x_k \rangle = f_3 \\ \langle x_i x_j x_k x_l \rangle = f_4 \end{cases} \quad (3-92)$$

在此约束的条件下我们对(3-91)式 ρ 求导可以得到:

$$J(\rho) + \rho J'(\rho) = \alpha + \sum_i \beta_i x_i + \sum_{ij} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{ijk} \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{ijkl} \beta_{ijkl} x_i x_j x_k x_l \quad (3-93)$$

在此, 将 J 看成是 ρ 函数, 上述微分方程看作为—阶变系数非齐次微分方程, 求解方程, 得

$$J(\rho) = \frac{1}{\rho} \left\{ \left(\alpha + \sum_i \beta_i x_i + \sum_{ij} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{ijk} \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{ijkl} \beta_{ijkl} x_i x_j x_k x_l \right) \rho + c \right\} \quad (3-94)$$

化简后得:

$$J = \alpha + \sum_i \beta_i x_i + \sum_{ij} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{ijk} \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{ijkl} \beta_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + \frac{c}{\rho} \quad (3-95)$$

所以,

$$\rho = \frac{c}{J - \left\{ \alpha + \sum_i \beta_i x_i + \sum_{ij} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{ijk} \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{ijkl} \beta_{ijkl} x_i x_j x_k x_l \right\}} \quad (3-96)$$

而广义流 J 可以描述成为:

$$J = \eta + \sum_i \gamma_i x_i + \sum_{ij} \gamma_{ij} x_i x_j + \sum_{ijk} \gamma_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{ijkl} \gamma_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + \cdots \quad (3-97)$$

将(3-97)式代入(3-96)式可得

$$\rho = \frac{c}{\eta - \alpha + \sum_i (\gamma_i - \beta_i) x_i + \sum_{ij} (\gamma_{ij} - \beta_{ij}) x_i x_j + \sum_{ijk} (\gamma_{ijk} - \beta_{ijk}) x_i x_j x_k + \sum_{ijkl} (\gamma_{ijkl} - \beta_{ijkl}) x_i x_j x_k x_l} \quad (3-98)$$

将上式的分母部分看作是由 E 指数在 $(x_i, x_j, x_k, x_l) = 0$ 处展开的幂级数形式, 即

$$\begin{aligned} & \eta - \alpha + \sum_i (\gamma_i - \beta_i) x_i + \sum_{ij} (\gamma_{ij} - \beta_{ij}) x_i x_j + \sum_{ijk} (\gamma_{ijk} - \beta_{ijk}) x_i x_j x_k + \sum_{ijkl} (\gamma_{ijkl} - \beta_{ijkl}) x_i x_j x_k x_l \\ & = \exp \left(\mu + \sum_i \sigma_i x_i + \sum_{ij} \sigma_{ij} x_i x_j + \sum_{ijk} \sigma_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{ijkl} \sigma_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + \cdots \right) \end{aligned} \quad (3-99)$$

其系数对应的关系是:

$$\begin{cases} \eta - \alpha = e^\mu \\ \gamma_i - \beta_i = \sigma_i e^\mu \\ \gamma_{ij} - \beta_{ij} = \sigma_{ij} e^\mu \\ \gamma_{ijk} - \beta_{ijk} = \sigma_{ijk} e^\mu \\ \gamma_{ijkl} - \beta_{ijkl} = \sigma_{ijkl} e^\mu \end{cases} \quad (3-100)$$

所以,

$$\rho = \exp \left(- \left(\mu + \sum_i \sigma_i x_i + \sum_{ij} \sigma_{ij} x_i x_j + \sum_{ijk} \sigma_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{ijkl} \sigma_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + \cdots \right) \right) \quad (3-101)$$

在这里, 系统的概率的 E 指数分布, 其指数部分类似于金典统计理论中概率的指数部分, 因此可以将其类似的定义为广义势函数, 即,

$$\Phi(\sigma, x) = \mu + \sum_i \sigma_i x_i + \sum_{ij} \sigma_{ij} x_i x_j + \sum_{ijk} \sigma_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{ijkl} \sigma_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + \cdots \quad (3-102)$$

在这里只处理两个变量的系统也就是方程(3-102)中脚标取 1 和 2, 即广义流可重新表述为,

$$J = \eta + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_{11} x_1^2 + 2\gamma_{12} x_1 x_2 + \gamma_{22} x_2^2 \cdots \quad (3-103)$$

假设 $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{w}$, 其中广义流 J 在 $\bar{x} = \bar{x}_0$ 处具有极高的对称性, 换句话说就是广义流 $\bar{x}_0$ 处取得极值, 而 w 是一个连续变化的小量。广义流或者几率密度指数部分(势函数)将在 $\bar{x}_0$ 点附近, 即 w 变量下具有反演不变性。这样, 对广义流函数作形式上的变形, 在其近平衡点附近进行描述。

首先, 对变量 (x_1, x_2) 平移矢量 (a, b) , 使广义流的一次项消失, 即

$$J = \eta' + \gamma_{11}(x_1 - a)^2 + 2\gamma_{12}(x_1 - a)(x_2 - b) + \gamma_{22}(x_2 - b)^2 + \cdots \quad (3-104)$$

将表达式(3-104)展开与(3-103)式比较系数, 得到:

$$\begin{cases} a = \frac{\gamma_{11}(\gamma_1 \gamma_{22} - \gamma_2 \gamma_{12})}{2(\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2)} \\ b = \frac{\gamma_2 \gamma_{11} - \gamma_1 \gamma_{12}}{2(\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2)} \end{cases} \quad (3-105)$$

令 $\begin{cases} x'_1 = x_1 - a \\ x'_2 = x_2 - b \end{cases}$, 即(3-104)变为,

$$J = \mu + \gamma_{11} x_1'^2 + 2\gamma_{12} x_1' x_2' + \gamma_{22} x_2'^2 \cdots \quad (3-106)$$

随之, 对广义流二阶项进行处理, 使其二项式转换成标准二次型, 也就是对其进行坐标变换使得耦合项消失, 也就是新坐标满足正交性, 即

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x'_i \quad (3-107)$$

其中 a_{ij} 是系数矩阵中的基元，即系数形成的矩阵为：

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{x_0} \Rightarrow (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \quad (3-108)$$

对系数矩阵求其特征值和对应的特征向量。

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \lambda & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3-109)$$

解之得：

$$\lambda_{\pm} = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22} \pm m}{2} \quad (3-110)$$

(上式中的 $m = \sqrt{(\gamma_{11} + \gamma_{22})^2 + 4(\gamma_{12}^2 - \gamma_{11}\gamma_{22})}$)

所以， λ_1 和 λ_2 对应的特征向量分别为：

$$\begin{cases} \beta_1 = \left(\frac{2\gamma_{12}}{\gamma_{11} - \gamma_{22} + m}, -1 \right)^T \\ \beta_2 = \left(\frac{2\gamma_{12}}{\gamma_{11} - \gamma_{22} - m}, -1 \right)^T \end{cases} \quad (3-111)$$

对特征向量 β_1, β_2 进行正交归一化，得变化矩阵为：

$$\psi = \begin{vmatrix} \frac{2\gamma_{12}}{(2m(m - \gamma_{11} + \gamma_{22}))^{\frac{1}{2}}} & \frac{2\gamma_{12}}{(2m(m + \gamma_{11} - \gamma_{22}))^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{(m - \gamma_{11} + \gamma_{22})^{\frac{1}{2}}}{2m} & \frac{(m + \gamma_{11} - \gamma_{22})^{\frac{1}{2}}}{2m} \end{vmatrix} \quad (3-112)$$

所以，对应势函数写成如下形式：

$$\phi(\lambda, \xi) = \zeta + \sum_j \lambda_j y_j^2 + \dots \quad (3-113)$$

即对应到广义流方程中为：

$$J = \zeta + \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots \quad (3-114)$$

3.3.2 建立河网中的序参量方程

1) Langevin 方程

通过上节对广义流表达式的形式变换，我们清楚的知道，是将广义流或者势函数转变到了在高度对称点附近的变化，即以一个小量为自变量的函数。如果要对其进行精确求解具有一定地难度，因此采用动力学演化方程——郎之万演化方程。

Langevin演化方程的形式如下：

$$\dot{y} = K(y) + F(t) \quad (3-115)$$

其中 $F(t)$ 为随机涨落或者高斯白噪声，而 $y = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ 是系统的态矢量，类似于在广义流中的矢量 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。然而在离散系统中， $F(t)$ 这个随机力的方向不唯一，既可能有正向的，也可能有反向的，也就定义了 $F(t)$ 有正负号，虽然它出现正负是随

机性的，但是统计结果发现正负号出现的次数是相等的，也就是对其求平均，满足，

$$\begin{cases} \langle F_i(t) \rangle = 0 \\ \langle F_i(t) F_j(t') \rangle = Q \delta_{ij} (t - t') \end{cases} \quad (3-116)$$

因此，用 $\bar{x}$ 来表示高维空间的复杂系统的一个态矢量，在一些强迫涨落的情形下，Langevin演化方程变为，

$$dy_i(t) = K_i(y(t))dt + \sum_m g_{im}(y(t))dw_m(t) \quad (3-117)$$

2) 线性稳定态的序参量分析

对于 $y = y(x, t)$ 的动力学演化方程为，

$$\dot{y} = K(y, \alpha) + F(t) \quad (3-118)$$

假设非线性函数 $K(y, \alpha)$ 依赖于一个控制参量 α ，作如下假设：对于控制参量 α 的取固定值 α_0 ，当我们连续改变序参量的值时，可以把 $\bar{x}_0$ 开拓到这个新的参数值，即为，

$$K(y(\alpha), \alpha) \quad (3-119)$$

现在我们研究新控制参量 α 处的稳定性问题，集中讨论解变为不稳定的情况。用线性分析稳定性情况，可以作如下的假设：

$$\alpha : y = y_0(\alpha) + w(t) \quad (3-120)$$

假设 y_0 对 α 的变化是光滑的，即对 α 至少一阶可导。所以将此代入(3-125)式有：

$(y_0 + w)'_{\alpha} = K(y, \alpha)$ 即，

$$\dot{y}_0 + \dot{w} = K(y_0 + w, \alpha) \quad (3-121)$$

然后对方程右边的项 $K(y_0, \alpha)$ 在 y_0 态时，作泰勒展开可得，

$$\dot{y}_0 + \dot{w} = K(y_0, \alpha) + L(y_0)w + \dots \quad (3-122)$$

(其中 $L(y_0) = \left. \frac{\partial K}{\partial y} \right|_{y=y_0}$ ，而 $\dot{y}_0 = K(y_0, \alpha)$)

化简上式得，

$$\dot{w} = L(y_0)w + \dots \quad (3-123)$$

由于 w 是一个小量，因此高价项可以忽略，只保留一价，则有，

$$\dot{w} = L(y_0)w \quad (3-124)$$

对此方程求解可得，

$$\ln(w) = L(y_0)t + c \quad \text{即 } w = c'e^{L(y_0)t} \quad (3-125)$$

其中 c' 是空间坐标 x 的函数，因此我们将上述的方程简写成为，

$$w = e^{\lambda t} v(x) \quad (3-126)$$

v 是坐标的矢量，不依赖于时间。其中 $\lambda > 0$ 是不稳定模式，我们将其记作为： λ_u, v_u ； $\lambda < 0$ 是稳定模式，将其记为： λ_s, v_s 。

稳定模式和 unstable 模式仅涉及线性分析。事实上，不稳定模式将会在变量之间的相互耦合下转变为稳定模式。

3) 演化方程的过渡

我们将上述的线性分析结果分开来写，即(3-128)式子中的 w 分成稳定模型和 unstable 模型，将其写成如下形式：

$$w = \sum_u \xi_u(t) v_u + \sum_s \xi_s(t) v_s \quad (3-127)$$

其中 v 是空间的函数，不依赖时间项，即可以表述为： $v = v(\bar{x})$ 。将(3-127)代入 $y = y_0 + w$ 方程变为

$$y = y_0 + \sum_u \xi_u(t) v_u(\bar{x}) + \sum_s \xi_s(t) v_s(\bar{x}) \quad (3-128)$$

将(3-128)式代入动力学演化方程有

$$\dot{y}_0 + \sum_u \dot{\xi}_u(t) v_u(\bar{x}) + \sum_s \dot{\xi}_s(t) v_s(\bar{x}) = K(y_0 + \sum_u \xi_u(t) v_u(\bar{x}) + \sum_s \xi_s(t) v_s(\bar{x}), \alpha) + F(t) \quad (3-129)$$

对上述方程进行计算, 由于上面计算出来的结果是 E 指数函数, 依据 E 指数的运算性质, 可以将方程(3-128)变成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_u = \lambda_u \xi_u + K_u(\xi_u, \xi_s) + F_u(t) \\ \dot{\xi}_s = \lambda_s \xi_s + K_s(\xi_u, \xi_s) + F_s(t) \end{cases} \quad (3-130)$$

这里 s, u 的包含两个意思, 一是代表变量的组成元的角标; 二是区分稳定模式和不稳定模式的角标。这里的 ξ_u 就是系统里的快变量, 也就是系统主控变量——序参量。

这样的变换没有降低计算复杂度, 接下来利用伺服原理对其处理, 将其变化为,

$$\xi_s(t) = f_s[\xi_u(t), t] \quad (3-131)$$

考虑相似原理, 其可写成为,

$$\begin{cases} \dot{\xi}_u = \lambda_u \xi_u + h_u(\xi_u, \xi_s) + F_u(t) \\ \dot{\xi}_s = \lambda_s \xi_s + g_s(\xi_u, \xi_s) + q_s k_s(\xi_u) + F_s(t) \end{cases} \quad (3-132)$$

这里 $h_u(\xi_u, \xi_s)$ 是稳定模型中的非线性项, $g_s(\xi_u, \xi_s)$ 是不稳定模型中的非线性关联项, 对应的 $F_u(t)$ 和 $F_s(t)$ 分别是稳定和 unstable 模型的随机项。在相似原理的条件下 $\dot{\xi}_s = 0$ 即可以推导出,

$$\xi_s = -\frac{g_s(\xi_u, \xi_s) + q_s k_s(\xi_u) + F_s(t)}{\lambda_s} \quad (3-133)$$

也就是将(3-132)方程组变化为:

$$\dot{\xi}_u = \lambda_u \xi_u + h'_u(\xi_u) + F(t) \quad (3-134)$$

其中 $h'_u(\xi_u)$ 是不同于前面的表达式中的 $h_u(\xi_u, \xi_s)$ 的 ξ_u 的高阶表达式, 这里 ξ_u 是小量, 那么 $h'_u(\xi_u)$ 就是的 ξ_u 的高阶无穷小了。

根据上述的方程的变换, 我们就可以求解序参量微分方程了。如果对于单一变量而言, 我们可以把 v_u 的形式解写成如下形式,

$$v_u = L^{-1/2} \sin(\bar{k} \cdot \bar{x}) \quad (3-135)$$

因此可以将(3-128)式变为

$$y = y_0 + \xi_u(t) L^{-1/2} \sin(\bar{k} \cdot \bar{x}) \quad (3-136)$$

很显然, 在多个序参量和多个复杂函数 $v_u(x)$, 在复杂的系统都可以通过上述两个式子表示出来, 因此这个结论可以推导出空间结构相变的复杂系统。

3.3.3 涨落引起的河网冲淤平衡分析

在描述河型转变过程中, 河网的流量和含沙量将起主导作用。这样, 在最大广义流中我们可以引入河网的实际变量, 即可定义广义流中的驱动力为:

$$\begin{cases} x_1 = Q \\ x_2 = C \end{cases} \quad (3-137)$$

其中 C 代表平均含沙量, Q 代表平均流量。也就是广义流或者序参量方程中的角标只取 1 和 2, 这和我们之前所讨论的结果也是想统一的。在河网这样开放复杂的系统中, 每个量之

间是相互耦合、相互协调的。那么, 流量和含沙量究竟哪个才是河网的主导变量呢?

1) 河网中的主控变量

自然河网系统是一种特殊的输运网络, 是以河流网络汇流为前提的枝形网络。水沙动力学是河流网络的基本过程, 是河网的发育和成型的本质。成型河流网络的水沙动力学更是以调沙调水、河道管理等与工程有关的问题。河网模型主要采用的以下几个基本守恒方程: 水流连续性方程、动力学方程、泥沙运动方程和河床变形方程。其研究的问题主要集中在某河段上或者在某些水库, 具有较大的局限性, 另外模型中参变量繁多, 有时无法突现主要参量之间的耦合关系, 如冲淤量与流量和含沙量之间的变化规律。采用模型的计算对实际中的预测、预报变得非常困难, 甚至有些模拟结果与实际的大相径庭。事实上, 河流网络是一个自组织分形网络, 其成因主要是水流与河床物质之间的反馈作用, 直接表现就是河床的冲刷与淤积。为此, 以黄河为例来寻找能主导河网演化的决定性变量, 即导致河网冲淤和水流携沙能力反馈调节规律的泥沙输移的动力学模型中主控变量。

在有些文章中采用了如图 3-6 所示的树状河网分流分级模型, 分别定义了支流和干流。

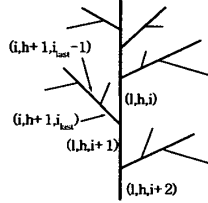


图 3-6 河流的二分树网络结构

根据麦乔威、赵业安、潘贤娣等人的研究^[61], 判断河道形态直观物理量输沙率 S 与影响河道形态的基础变量(流量 x_1 和含沙量 x_2)之间的基本关系表述为^[62],

$$S = Ax_1^\alpha x_2^\beta \quad (3-138)$$

其中 A 为携沙系数, α, β 是指数, 与河床形态有关。据统计在低含沙量(清水期)时, 黄河的输沙率方程中, 指数 $\beta = 0, \alpha \approx 2$, 因此输沙率方程变为,

$$S = Ax_1^\alpha \quad (3-139)$$

再根据课题组之前对某一河段泥沙输移的描述。建立如下方程加以说明:

① 流量方程: 流量方程隐含的连续性假设, 即出流量=入流量。现在, 若不考虑支流与汇流的影响, 如果只考虑干流影响, 则其流量方程可写成为,

$$x_1(i+1, j) = x_1(i, j) \quad (3-140)$$

② 冲淤量方程: 各河段上河道形态、河床地质、流体速度等因素决定河网的携沙能力, 导致河段上的出流携沙量和入流携沙量不等, 从而使泥沙在该河段出现冲刷或者淤积。基于流量方程以及输沙率方程, 可将泥沙冲淤方程表示为,

$$\Delta S(i+1, j) = S(i+1, j) - S(i, j) \quad (3-141)$$

③ 携沙系数方程: 河段上的携沙能力或者携沙量随时不断变化, 任意一河段上的携沙能力同时受本河段以及其上下相邻河段在前一时步冲淤状态的影响。于是河段携沙系数的自身调整可以表述成为:

$$A(i+1, j+1) = A(i+1, j) - k_1 \Delta S(i+1, j) / (x(i+1, j+1))^r + k_2 \Delta S(i, j) / (x(i+1, j+1))^r \quad (3-142)$$

k_1, k_2 为携沙系数的影响因子, k_1 作为第 $i+1$ 河段冲淤量对自身携沙能力的影响因子, k_2 作为第 i 河段冲淤量对第 $i+1$ 河段携沙能力的影响因子, 称之为协调系数, 分别代表某河段及其汇入河段冲淤态对携沙力的调节程度。 A 为携沙系数, ΔS 为河段上的泥沙冲淤量, $\Delta S > 0$ 表示冲刷, $\Delta S < 0$ 表示淤积。再根据河道在不引水的条件下, 河流输沙率表达式可以写成为

$$S = x_1 x_2 \quad (3-143)$$

联立(3-139)和(3-143)方程可以得到

$$x_2 = Ax_1^{\alpha-1} \quad (3-144)$$

综上所述，我们可以得到输沙率 S 和含沙量 x_1 都是流量 x_2 的函数，可表述为

$$\begin{cases} S = Ax_1^\alpha \\ x_2 = Ax_1^{\alpha-1} \end{cases} \quad (3-145)$$

也就是输沙率和含沙量都是受流量支配的，因此我们可以把流量 x_1 作为我们在寻找序参量中的主控变量。

通过上述的描述，由伺服原理可以知道含沙量 x_2 和输沙率 S 被流量 x_1 奴役的变量。因此，河网系统中的主控变量——流量，所以序参量方程为，

$$\dot{\xi} = \lambda\xi - \beta\xi^3 + F(t) \quad (3-146)$$

上式中的线性项，有一定的阈值，而非线性项对系统的稳定性起决定性的作用。由于方程(3-146)中 $F(t)$ 是高斯白噪声，则有，

$$\xi(t) = \frac{e^{\lambda(t-c)}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 + e^{2\lambda(t-c)}\beta}} \quad (3-147)$$

其中 c 积分常数。现在假定 $\begin{cases} \lambda = 2.0 \\ \beta = 5.0 \\ c = 2.0 \end{cases}$ 时，序参量的图像为：

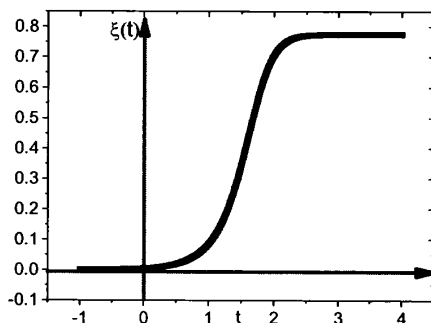


图3-7 水沙组合的序参量图像

通过图3-7，可以看到图像出现了两个“平台”和一个陡坡，这个类似于平衡相变。近“0”端的平台是低序相；高端平台对应与高序相，陡坡是系统从低序相转变为高序相的过渡过程。

根据(3-136)式，假设初始状态为

$$\begin{cases} y_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ L = \left(\frac{\partial J}{\partial x_i} \right) \bigg|_{\substack{x_1 = x_1^0 \\ x_2 = x_2^0}} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 x_1^0 \\ 2\lambda_2 x_2^0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3-148)$$

我们将上述序参量的突变代入稳定“流”背景的广义流中，考察序参量的变化对广义流的影响。

所以，

$$y = \begin{pmatrix} x_1^0 + \frac{\xi(t) \sin(kx_1)}{\sqrt{2\lambda_1 x_1^0}} \\ x_2^0 \end{pmatrix} \quad (3-149)$$

即系统经过强迫涨落后，原来的变量就变成了，

$$\begin{cases} x_1' = x_1^0 + \frac{\xi(t) \sin(kx_1)}{\sqrt{2\lambda_1 x_1^0}} \\ x_2' = x_2^0 \end{cases} \quad (3-150)$$

将其带入(3-114)式，可得广义流方程为，

$$J = \zeta + \lambda_1 \left\{ -\frac{2\gamma_{12}}{(2\Delta(\Delta - \gamma_{11} + \gamma_{22}))^{\frac{1}{2}}} \left(x_1^0 + \frac{\xi(t) \sin(kx_1)}{\sqrt{2\lambda_1 x_1^0}} \right) + \left(\frac{\Delta - \gamma_{11} + \gamma_{22}}{2\Delta} \right)^{\frac{1}{2}} x_2^0 \right\}^2 \quad (3-151)$$

$$+ \lambda_2 \left\{ \frac{2\gamma_{12}}{(2\Delta(\Delta + \gamma_{11} - \gamma_{22}))^{\frac{1}{2}}} \left(x_1^0 + \frac{\xi(t) \sin(kx_1)}{\sqrt{2\lambda_1 x_1^0}} \right) + \left(\frac{\Delta + \gamma_{11} - \gamma_{22}}{2\Delta} \right)^{\frac{1}{2}} x_2^0 \right\}^2$$

x_1^0, x_2^0 是河网这个完全开放系统中稳定态的流量和含沙量确定值。而且满足 $x_2^0 = A(x_1^0)^{\alpha-1}$ 。改变 x_1^0 ，也就是在不同的水沙组合 (x_1^0, x_2^0) 的条件下，研究不同时刻序参量下广义流的变化情况。

在不同的参数组合下，得到了广义流的图像

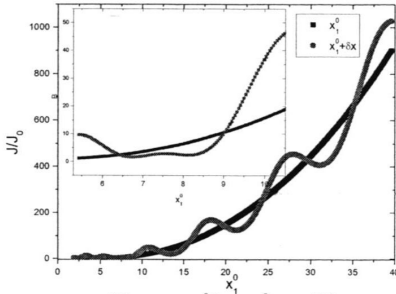


图3-8 $J - x_1^0$ 与 $J - x_1^0 + \delta x$ 对比

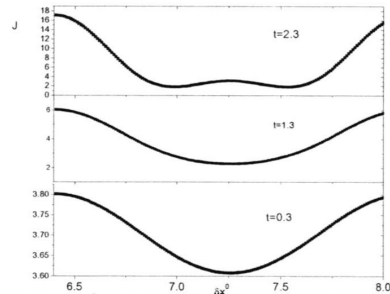


图3-9 在 $x_1^0=8.0$ 时，不同序参量下的“流”涨落

从图3-8可以看出，当系统引入外界的驱动力后，广义流在 $x_1^0 \in (6,10)$ 区域由“谷”变成了一个“峰”，而在其它区域没有什么明显的变化。围绕 x_1^0 的涨落 $\delta x_1 = \frac{\xi(t) \sin(kx_1)}{\sqrt{2\lambda_1 x_1^0}}$ 我

们称之为涨落力。图3-9是去掉稳态广义流背景，显示纯粹由涨落力引起流的变化。引入外界驱动之后，系统内部会发生自我调节。当外界的驱动力比较小即在低序态时 ($t = 0.3$)，广义流随驱动力的增减做同趋势的变化，即定性不变的“量变”。可以解释为水沙耦合处于一般水平(耦合与驱动同步变化)。当外界的驱动力比较大即在高序态时 ($t = 2.3$)，广义流的变化趋势与驱动力的变化完全不同。相对于低序相，广义流发生性质不同的根本变化：低序相驱动最小时广义流曲线的“谷”(最小值)在高序相转变为“峰”(极大值)。可以解释为水沙耦合发生了突变(驱动最小时耦合增大)。按照结构理论^[53]，“For a finite-size system to persist in time (to live), it must evolve in such a way that it provides easier access to the imposed (global) currents that flow through it”，意味着这种变化一定伴随着系统自身的根本变化即结构相变。而在过度态 ($t = 1.3$) 时，广义流的“谷”逐渐转变成为一个平台，即要发生结构相变的临界状态。为了能描述这种结构相变的方向性，图3-9中，突变后，系统是向左边的“谷”跃迁还是向右边的“谷”跃迁。如果向左边的“谷”跃迁，那么就意味着系统中流量趋向于减小的方向，对应于图3-8中，流量减小，广义流也减小，即在河网系统中的输沙率减小，这也

就意味着有部分的沙子被遗留下来——河网系统处于淤积态；同理，倘若是向右“谷”跃迁，广义流增大，意味着河网系统的输沙率增加，也就是河床上的原来沉积的沙子重新被携带起来，这时我们认为河网系统处于冲刷状态。接下来我们讨论河网系统发生突变时，系统是如何选择的问题。

为了能诠释河道在结构相变的过程中如何选择，我们将随机演化的Langevin方程转变为为几率跃迁方程——Fokker-Planck方程，即将方程(3-146)转变为^[49]，

$$\dot{P}(\xi, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi}[(\lambda \xi - \beta \xi^3)P] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P \quad (3-152)$$

其中 P 是系统在 t 时刻处于 ξ 状态的几率， $\xi = \frac{\xi(t) \sin(kx_1)}{\sqrt{2\lambda_1 x_1^0}}$ 是序参量（主控变量和时间的耦合函数）， D 是漂流系数。

一个处于稳定状态的系统，各个子系统都处于一种相对稳定的分布，也就是其几率分布不随时间变化或者随时间变化很小可以忽略，即 $\dot{P}(\xi, t) = 0$ 时，可得到 P 的分布为：

$$P = \underbrace{N}_{1} (\underbrace{\text{const} \tan t + A(\xi + \alpha_2)}_2 + B(\xi + \alpha_2)^2 + C(\xi + \alpha_2)^3 + \dots) e^{\frac{\lambda \xi^2}{D} - \frac{\beta \xi^4}{2D}} \quad (3-153)$$

其中系数的第一部分 N 是归一化常数，第二部分是一个复杂函数的泰勒展开式，由于 ξ 是一个小量，这里只保留 ξ 的三次项，高阶项可以忽略。因此，上式可变成

$$P = \underbrace{N}_{1} (\underbrace{\text{const} \tan t + A(\xi + \alpha_2)}_2 + B(\xi + \alpha_2)^2 + C(\xi + \alpha_2)^3) e^{\frac{\lambda \xi^2}{D} - \frac{\beta \xi^4}{2D}} \quad (3-154)$$

当取 $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \text{ 或者} \\ C=0 \end{cases} \begin{cases} A=0 \\ C=0 \\ \alpha_2=0 \end{cases}$ 时，其几率分布属于对称分布，如图3-10所示，

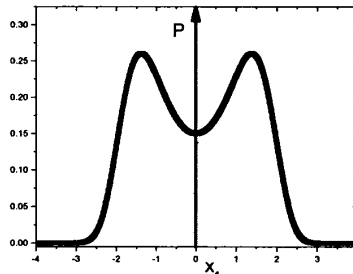


图3-10 参数A与C为0时，系统处于等概率状态

图3-10描述了河网系统在参考系数 $A=0, C=0$ 时，概率成对称分布，也就是，河网系统在相对稳定状态突变时，向两个谷越变的几率相等。

当 $A \neq 0$ 或者 $C \neq 0$ 或者 $\begin{cases} B \neq 0 \\ \alpha_2 \neq 0 \end{cases}$ 时，几率的对称分布就会出现破缺，即不妨假设

$$\begin{cases} A=7.5 \\ B=0 \\ C=-1.0 \end{cases}, \text{ 在此条件下可得到几率的分布图为,}$$

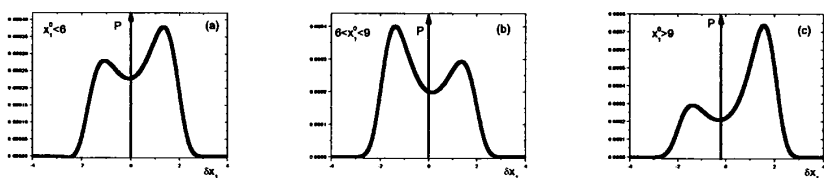


图3-11 跃迁概率分布：图(a)是 $x_1^0 < 6$ 时，系统的选择概率分布；图(b)是 $6 < x_1^0 < 9$ 时，系统的选择概率分布；图(c)是 $x_1^0 > 9$ 时，系统的选择概率分布。

在上述 a, b, c 图中，我们可以将 x_1^0 分为三个区域：

第一区： $x_1^0 < 6$ ，在这个区域落在二个谷中的可能性要比第一个谷中可能性要大。也就是在河网在清水期，外界驱动力迫使系统发生相变时，系统最可能选择的状态是冲刷态。

第二区： $6 < x_1^0 < 9$ ，从图像上来看落在第一个谷中的几率要比第二个谷中的几率大。即在此区间，系统在相变过程中，最大可能的跃迁到淤积状态。

第三区： $x_1^0 > 9$ ，很明显在此区间系统状态落在第二个谷中的几率要大。换句话说就是，河网系统在高流量，也即高含沙条件下，在相变过程中系统又会向冲刷态跃迁。

通过上述对河网系统状态选择的描述，发现河道在转型的水沙两相冲淤过程中，出现了两个冲淤平衡点，前一个临界点，也就是在非高含沙水流的区域，被称为冲淤下临界；而后一个临界点，也就是高含沙水域的河道中，被称作为冲淤上临界。

由冲淤上临界和下临界，把河道状态分为三个阶段，在下临界以下，河道以选择冲刷态为主；而在下临界和上临界之间，河道以选择淤积态为主；而在上临界以上，河道又变成以选择冲刷态为主。

3.4 结论与讨论

本研究通过采用协同学思想、奴役原理对完全开放的河流网系统进行预处理，寻求河网系统的主控变量——序参量，建立序参量方程，发掘外界的驱动力对开放复杂系统的作用。在系统的自我调节过程中，不断地进行自身状态的改变、结构耦合的转变，对于不同流量的河网，系统对外界驱动力的协调方式不同，当河网系统的流量较小时，接受外界的驱动力后，系统会加强冲刷，即水沙耦合系数加强，河流网携沙能力加强；当随着流量的增加，河网系统会对上述的选择作出调整，增大到一定的区间，系统在受外界驱动力时，水沙耦合系数降低，使部分被携带的沙子沉积下来，形成了淤积的状态；当流量再增加，增大到一定程度，河网系统接受外界驱动力，重新将耦合系数增加，将原来的淤积态转变成了冲刷态。可以解释许炯心等人对黄河水沙组合对河型状态的影响出现的冲刷淤积双临界现象。

第四章 形成湍流结构的过程研究

4.1 引言

流动是在宏观世界中物质、能量传递基本过程之一，象千变万化的大气流、格式各样的湍流现象。而这些复杂多变的现象，是由于流体具有粘性。粘性是流体抗拒流动能力的度量，是流体之间相互作用加强的动力，使流态失稳形成复杂流动(包括湍流)。当Stokes引入粘性与切应力成正比的关系建立了Navier-Stokes方程为核心的流动理论，Navier-Stokes方程就被称为是研究复杂流体最基本的依据，随之不断地提出雷诺平均方程、边界层理论、稳定性理论、涡动力学等诸多对流体处理方式，都是该方程的一种形式的理想化、结构化后的形式。但是随着流动中的各种现象复杂现象不断地被发现，试图用经典理论体系解释显得有些力不从心，对湍流中丰富的涡旋现象，包含有高度耗散的小尺度涡旋、不断从主流获取能量并通过级串过程传递能量的大尺度涡旋，解释就更是无从下手。试图在理论上建立一种普适的湍流模型是一件让所有人期待的事。

湍流问题一直是人们心里的难题，很多科学家试图想从不同的角度去解释那些复杂现象，做出了一些相当不错的成绩：如，Speziale建立了非线性的涡粘性模式；Haworth和Pope依据概率密度函数，借助Langevin方程重新构建了控制方程；Yakhot和Orszag提出了基于重整化群思想的湍流模式——Navier-Stokes方程进行了修正，引入了系统的随机项，认为系统的变化是由随机项引发的。本文试图从完备的N-S方程进行处理，得到湍流基本流线结构，解释统计力学上的不稳定点、鞍点、焦点和气象学种的“龙眼”等自然现象。

4.2 流体方程的建立

在流体问题的处理过程中，建立模型的依据是质量守恒、动量定律和能量定律。首先，考虑质量连续性：设在流场中取任意一个固定不动的微六面体，被称为控制体，取边长分别为： dx 、 dy 和 dz (在笛卡尔坐标系 $O-xyz$)。这样流体在流动的过程中，流入和流出该控制体，使控制体中的流体质量发生变化，可以根据质量不变性理论建立方程^[63,64]。

不妨假设在 t 时刻，流体的密度为 $\rho(x, y, z, t)$ ，速度为 $v(x, y, z, t)$ ，在各个坐标轴上的分量分别为： u 、 v 、 w 。考虑在 x 方向上在 Δt 时间内流体质量的变化，

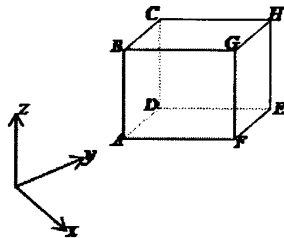


图 4-1 控制流体的结构示意图

在 $ABCD$ 控制面上， Δt 时间内将有 $\rho u dy dz \Delta t$ 的流体质量进入控制体，而在对应的 $EFGH$ 控制面上， Δt 时间内将有 $\rho u dy dz \Delta t + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz \Delta t) dx$ 流体质量流出，则在 x 方向上的净流出量为，

$$\rho u dy dz \Delta t + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u dy dz \Delta t) dx - \rho u dy dz \Delta t = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u dy dz \Delta t) dx \quad (4-1)$$

同理可以得到整个流体上质量变化为,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u dx_2 dx_3 \Delta t) dx + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho v dx_1 dx_3 \Delta t) dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho w dx_1 dx_2 \Delta t) dx_3 \quad (4-2)$$

然而, 控制体在 Δt 时间内的质量变化为,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx_1 dx_2 dx_3 \Delta t \quad (4-3)$$

综上所述, 根据质量守恒就有(4-2)式=(4-3)式。即,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx_1 dx_2 dx_3 \Delta t &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u dx_2 dx_3 \Delta t) dx + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho v dx_1 dx_3 \Delta t) dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho w dx_1 dx_2 \Delta t) dx_3 \\ &= \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dx_1 dx_2 dx_3 \Delta t \end{aligned} \quad (4-4)$$

化简后有,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4-5)$$

令,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (4-6)$$

代入(4-5)式, 就可以得到,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4-7)$$

其次考虑动量守恒: t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻, 控制体中的流体系数将运动到另外一位置, 其动量发生变化。在 Δt 时间内, 动量的变化包括两部分: ①、控制体内部的动量变化; ②、经体元控制面迁移的动量。设在 t 时刻控制体上的动量为, $\rho \vec{v} dx_1 dx_2 dx_3$, 则在 $t + \Delta t$ 时刻

控制体的动量为 $\rho \vec{v} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v} dx_1 dx_2 dx_3) \Delta t$, 所以在单位时间上动量变化为

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4-8)$$

经过控制面的迁移动量为: (可单独对六个控制面进行独立计算)

在 $ABCD$ 控制面上:

$$\rho u \vec{v} dx_2 dx_3 \Delta t \quad (4-9)$$

在 $EFGH$ 控制面上:

$$\rho u \vec{v} dx_2 dx_3 \Delta t + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u \vec{v} dx_2 dx_3 \Delta t) dx_1 \quad (4-10)$$

同样计算剩下两组对应的控制面, 等到控制面上的单位时间内净动量变化为,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho w \vec{v}) \right) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4-11)$$

因此微流体系统的动量变化率为,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho w \bar{v}) + \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \left(\frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)(\rho \bar{v}) + \rho \bar{v} \nabla \bar{v} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \left(\frac{D}{Dt}(\rho \bar{v}) + \rho \bar{v} \nabla \bar{v} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \left(\rho \frac{D}{Dt}(\bar{v}) + \bar{v} \left(\frac{D}{Dt}(\rho) + \rho \nabla \bar{v} \right) \right) dx_1 dx_2 dx_3
\end{aligned} \tag{4-12}$$

现在计算控制体上的质量力和表面力。设控制体的单位质量上的质量力为 $\bar{F}_b$ ，则控制体上的质量力为， $\rho \bar{F}_b dx_1 dx_2 dx_3$ 。表面应力为， $\left(\frac{\partial \bar{p}_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{p}_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{p}_{x_3}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$ ，现在定义 $\nabla \cdot \bar{P} = \frac{\partial \bar{p}_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{p}_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{p}_{x_3}}{\partial x_3}$ ，依据动量守恒定律得到，

$$\rho \frac{D \bar{v}}{Dt} + \bar{v} \left(\frac{D}{Dt}(\rho) + \rho \nabla \bar{v} \right) = \rho \bar{F}_b + \nabla \cdot \bar{P} \tag{4-13}$$

根据牛顿的实验定律：两层流体的切向应力与其速度梯度成正比：

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial x_2} \tag{4-14}$$

寻求应力张量 $\bar{P}$ 和应变率张量 $\bar{S}$ 之间的一般关系，满足 Stokes 的以下假设：

- ① 应力张量是应变率张量的线性函数；
- ② 流体是各向同性的，即流体的性质与方向无关；
- ③ 流体静止时应变率为零，流体中的压力就是静压强 p 。

所以他们之间的关系可写成为，

$$\bar{P} = a \bar{S} + b \bar{I} \tag{4-15}$$

根据(4-14)式，可以得到应变张量的分量为，

$$\begin{cases} p_{11} = a \frac{\partial u}{\partial x_1} + b & p_{12} = a \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2\mu S_{12} & p_{13} = a \frac{\partial u}{\partial x_3} \\ p_{21} = a \frac{\partial v}{\partial x_1} = 2\mu S_{21} & p_{22} = a \frac{\partial v}{\partial x_2} + b & p_{23} = a \frac{\partial v}{\partial x_3} \\ p_{31} = a \frac{\partial w}{\partial x_1} & p_{32} = a \frac{\partial w}{\partial x_2} & p_{33} = a \frac{\partial w}{\partial x_3} + b \end{cases} \tag{4-16}$$

从(4-16)式可以推出：

$$\begin{cases} a = 2\mu \\ b = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \bar{v} \end{cases} \tag{4-17}$$

其中 μ 是粘性系数。那么就有应力张量为，

$$\bar{P} = 2\mu \bar{S} + \left(\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \bar{v} \right) \bar{I} \tag{4-18}$$

由假设③可得，

$$\bar{P} = -p \bar{I} \tag{4-19}$$

其中 p 是静压力。根据(4-18)和(4-19)式, 可见 $\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33})$ 项中应包含 $-p$ 项, 又由于其中三项都是应力张量的一个不变量, 根据假设②, 它也应与应变率张量的不变量有关, 故可以写为,

$$\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) = -p + \mu' \nabla \cdot \bar{v} \quad (4-20)$$

代入(4-18)式就有,

$$\left. \begin{aligned} \bar{P} &= 2\mu\bar{S} + (-p + \lambda\nabla \cdot \bar{v})\bar{I} \\ \lambda &= \mu' - \frac{2}{3}\mu \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

将其代入流体动量方程则有,

$$\rho \frac{D\bar{v}}{dt} + \bar{v} \left(\frac{D}{Dt}(\rho) + \rho \nabla \bar{v} \right) = \rho \bar{F}_b + \nabla \cdot (2\mu\bar{S} + (-p + \lambda\nabla \cdot \bar{v})\bar{I}) \quad (4-22)$$

化简后有,

$$\rho \frac{D\bar{v}}{dt} + \bar{v} \left(\frac{D}{Dt}(\rho) + \rho \nabla \bar{v} \right) = \rho \bar{F}_b - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu\bar{S}) + \nabla(\lambda\nabla \cdot \bar{v})\bar{I} \quad (4-23)$$

这里由于大多数的 $\nabla \cdot \bar{v}$ 不是很大, 因此 Stokes 假设 $\mu' = 0$ 也就是说 $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, 再根据质量连续性方程, 可得到 Navier-Stokes 方程,

$$\rho \frac{D\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F}_b - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu\bar{S}) - \frac{2}{3}\nabla(\mu\nabla \cdot \bar{v})\bar{I} \quad (4-24)$$

而在流场有涡的情况下, 其压强分布可由伯努利方程求得, 假设流场是无界的, 并忽略重力, 分两个区域来处理压强分布。在自由涡外部区域 ($r > R$), 伯努利方程可写为,

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} \quad (4-25)$$

其中 p_∞ 是流场在无穷远处的流体压强值, 而在流场无穷远处速度值 v_∞ 为零, 那么在流场中任意一点的压强就变成,

$$p = p_\infty - \frac{\rho v^2}{2} \quad (4-26)$$

从上式我们可以得到在圆涡边界上 ($r = R$),

$$p_0 = p_\infty - \frac{\rho U_0^2}{2} \quad (4-27)$$

其中 U_0 是圆涡上的切向速度。

在自由涡内部区域 ($r < R$), 由于流体是刚性旋转, 所以满足:

$$p - \frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2 = \text{constant} \quad (4-28)$$

现在不妨取涡边界上一点, 即 ($r = R$) 处, 有,

$$p - \frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2 = p_0 - \frac{\rho}{2}\Omega_0^2 R^2, \text{ 即 } p = p_0 - \frac{\rho}{2}\Omega_0^2 R^2 + \frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2 \quad (4-29)$$

在涡边界上有 $U_0 = \Omega R$, 再将(4-27)式代入(4-29)式, 得,

$$p = p_\infty - \rho U_0^2 + \frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2 \quad (4-30)$$

这就是兰金组合涡在不考虑重力情况下的压强分布。

最后考虑能量方程: 设流体的密度为 ρ , 速度为 $\bar{v}$, 温度为 T 质量力为 $\bar{F}_b$, 与上述计算动量系统一样, 微元系统的能量也分两部分: a)、控制体内储存能的变化, 单位时间

的时间变化率为, $\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_s)dx_1dx_2dx_3$; b)、经控制面迁移的能引起的, 单位时间全部控制面净流出能为, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho ue_s) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho ve_s) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho we_s)\right)dx_1dx_2dx_3$ 。这样微元系统总的能量变化率为,

$$\begin{aligned}\frac{DE}{Dt} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_s) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho ue_s) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho ve_s) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho we_s)\right)dx_1dx_2dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_s) + \nabla \cdot (\rho \bar{v} e_s)\right)dx_1dx_2dx_3 \\ &= \left(\frac{D}{Dt}(\rho e_s) + \rho e_s \nabla \cdot (\bar{v})\right)dx_1dx_2dx_3 \\ &= \left(\rho \frac{D}{Dt}(e_s) + e_s \underbrace{\left(\frac{D}{Dt}(\rho) + \rho \nabla \cdot (\bar{v})\right)}_{=0}\right)dx_1dx_2dx_3\end{aligned}\quad (4-31)$$

现在计算对微元所作的功, 单位时间内质量力作的功为 $\rho \bar{F}_{b1} \cdot \bar{v} dx_1dx_2dx_3$; 表面力所作的功, 依据各个应力分量分别计算, 那么在 x 方向上应力做功为,

$$\begin{aligned}&\left[\left(p_{11} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - p_{11}u\right]dx_2dx_3 + \left[\left(p_{12} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2}\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - p_{12}u\right]dx_1dx_3 \\ &+ \left[\left(p_{13} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3}\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) - p_{13}u\right]dx_2dx_1 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p_{11}u) + \frac{\partial}{\partial x_2}(p_{12}u) + \frac{\partial}{\partial x_3}(p_{13}u)\right)dx_1dx_2dx_3\end{aligned}\quad (4-32)$$

由于功的可叠加性, 我们将所有表面上的功求和可得,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{p}_1 \cdot \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{p}_2 \cdot \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\bar{p}_3 \cdot \bar{v})\right)dx_1dx_2dx_3\quad (4-33)$$

这样, 质量力和表面应力对控制体所作的功为,

$$\frac{dw}{dt} = \left(\rho \bar{F}_{b1} \cdot \bar{v} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{p}_1 \cdot \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{p}_2 \cdot \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\bar{p}_3 \cdot \bar{v})\right)dx_1dx_2dx_3\quad (4-34)$$

最后, 计算控制体上的热辐射和热传导, 辐射热是通过电磁波对流体产生的热量, 设单位时间有辐射传入流体单位质量上的热量是 q , 则单位时间内对控制体的辐射热为 $\rho q dx_1dx_2dx_3$; 传导热通过流体传入控制体, 那么单位时间内传入 $ABCD$ 控制面的热量为

$$-k \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_2dx_3, \text{ 那么在单位时间传入 } EFGH \text{ 控制面上的热量为 } k \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_2dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_2dx_3\right)dx_1,$$

同理, 剩余控制面类似与上述两个控制面, 那么全部控制面的净传入热量为

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_3}\right)\right)dx_1dx_2dx_3\right] = \nabla \cdot [k \nabla T] dx_1dx_2dx_3$$

那么对于控制体上总的热量为,

$$Q = [\rho q + \nabla \cdot [k \nabla T]] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4-36)$$

依据热力学第一定律得,

$$\rho \frac{D}{Dt} e_s = \rho \bar{F}_{b1} \cdot \bar{v} + \nabla \cdot (\bar{P} \cdot \bar{v}) + \rho q + \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (4-37)$$

$$\text{其中 } \nabla \cdot (\bar{P} \cdot \bar{v}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{p}_1 \cdot \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{p}_2 \cdot \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\bar{p}_3 \cdot \bar{v}).$$

综上所述, 我们得到流体运动时必须满足的方程,

$$\begin{cases} \text{连续性方程} \\ \text{运动方程} \\ \text{能量方程} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \bar{v} = 0 \\ \rho \frac{D\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F}_b - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \bar{S}) - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \bar{v}) \bar{I} \\ \rho \frac{D}{Dt} e_s = \rho \bar{F}_{b1} \cdot \bar{v} + \nabla \cdot (\bar{P} \cdot \bar{v}) + \rho q + \nabla \cdot (k \nabla T) \end{cases} \quad (4-38)$$

4.2 求解 Navier-Stokes 方程

到目前为止, 对完备的 N-S 方程进行求解是比较困难, 而要做出精细结构解就更困难了, 很多人都采用了各种数值解, 比如多重网格法、四阶中心差分法等对湍流的演化做了一些基本的描述, 还有很多人利用现成的软件, 仿真了流体场的结构, 这样的描述让我们的感官认识更清楚, 没有能真正地了解其精细结构, 本文采用了李群对微分方程的求解方法, 求解了粘性不可压缩流体在均匀场中的速度分布, 并得到了广义的形式解^[65-71]。

对于理想的不可压缩粘性流体的 N-S 方程,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F}_b - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (2\mu \mathbf{S}) \end{cases} \quad (4-39)$$

对于理想流体, 假设其中粘性系数和流体的密度为一常数, 受到的外力为恒力或者假设外力为零。这样 N-S 方程的形式变化为,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} \end{cases} \quad (4-40)$$

其中矢量 $\mathbf{u}$ 是 x, y, z, t 的函数, 它的分量形式为 (u, v, w) 。显然上述方程的独立变量为 x, y, z, t , 依赖变量为 u, v, w, p 。现在引入参考速度 U 和参考长度 d , 将上述方程作无量纲变换^[64],

$$\begin{cases} u' = \frac{u}{U} \\ x' = \frac{x}{d} \\ p' = \left(\frac{d}{\rho_0 \mu U} \right) p \\ t' = \left(\frac{\mu}{d^2} \right) t \end{cases} \quad (4-41)$$

则上述(4-40)式变化为,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + R(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} \end{cases} \quad (4-42)$$

其中 $R = \frac{Ud}{\mu}$ 是雷诺数, 对于这样的方程求解是相对比较困难的, 通过对旋转对称性群操作的相关性质研究, 如果将 N-S 方程这样的系统在旋转对称性下可以得到, 速度的分量 (v^r, v^θ, v^z) 和压强不依赖旋转角度 φ , 因此在这样的柱坐标系下 N-S 方程中的微分算符变化成为,

$$\begin{cases} \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{cases} \quad (4-43)$$

因此, 在旋转对称性的条件下, 当压强为均匀场时, N-S 方程可变成如下形式^[66],

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (D\Psi) - \frac{\mu}{\rho} D^2 \Psi + r \frac{\partial \left(\Psi, \frac{D\Psi}{r^2} \right)}{\partial(r, z)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} (\omega^2) = 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} - \mu D\omega + r \frac{\partial (\Psi, \omega)}{\partial(r, z)} = 0 \end{cases} \quad (4-44)$$

其中 Ψ 是流函数, D 是微分算符, 再根据流体的连续性方程可以推导出,

$$\begin{cases} v^r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ v^z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ \omega = rv^\theta \end{cases} \quad (4-45)$$

通过上述的一系列变形, 显然微分方程中有 t, r, z 三个独立变量和 ω, Ψ 两个关联函数。因此, 可以将生成算符写成如下格式,

$$V = \xi(r, z, t, \omega, \Psi) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(r, z, t, \omega, \Psi) \frac{\partial}{\partial r} + \tau(r, z, t, \omega, \Psi) \frac{\partial}{\partial z} + \zeta(r, z, t, \omega, \Psi) \frac{\partial}{\partial \omega} + \phi(r, z, t, \omega, \Psi) \frac{\partial}{\partial \Psi} \quad (4-46)$$

从方程组(4-44)可以看出系统是 $\Psi^{(n)} \rightarrow n = 4$, 因此生成算符这样的矢量场的延拓为,

$$\begin{aligned} pr^{(4)}V = & V + \zeta^t \frac{\partial}{\partial \omega_t} + \zeta^r \frac{\partial}{\partial \omega_r} + \zeta^z \frac{\partial}{\partial \omega_z} + \zeta'' \frac{\partial}{\partial \omega_{tt}} + \zeta^{tr} \frac{\partial}{\partial \omega_{tr}} + \zeta^{tz} \frac{\partial}{\partial \omega_{tz}} \\ & + \zeta^{rr} \frac{\partial}{\partial \omega_{rr}} + \zeta^{rz} \frac{\partial}{\partial \omega_{rz}} + \zeta^{zz} \frac{\partial}{\partial \omega_{zz}} + \phi^t \frac{\partial}{\partial \Psi_t} + \phi^r \frac{\partial}{\partial \Psi_r} + \phi^z \frac{\partial}{\partial \Psi_z} + \phi'' \frac{\partial}{\partial \Psi_{tt}} \\ & + \phi^{rt} \frac{\partial}{\partial \Psi_{rt}} + \phi^{zt} \frac{\partial}{\partial \Psi_{zt}} + \phi^{rr} \frac{\partial}{\partial \Psi_{rr}} + \phi^{rz} \frac{\partial}{\partial \Psi_{rz}} + \phi^{zz} \frac{\partial}{\partial \Psi_{zz}} + \dots + \phi^{zzzz} \frac{\partial}{\partial \Psi_{zzzz}} \end{aligned} \quad (4-47)$$

其中,

$$\begin{aligned}\zeta' &= D_t(\zeta - \xi\omega_r - \eta\omega_z - \tau\omega_t) + \xi\omega_r + \eta\omega_z + \tau\omega_t \\ \zeta^x &= \dots\end{aligned}\quad (4-48)$$

$$\phi^{zzzz} = D_z^4(\phi - \xi\Psi_r - \eta\Psi_z - \tau\Psi_t) + \xi\Psi_{zzzzr} + \eta\Psi_{zzzzz} + \tau\Psi_{zzzzt}$$

将其带入 N-S 方程，对应的系数比较，可计算出 $\xi, \eta, \tau, \zeta, \phi$ ，可以得到四个矢量场生成算符，

$$\begin{cases} V_1 = \frac{\partial}{\partial t} \\ V_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \Psi \frac{\partial}{\partial \Psi} \\ V_3 = \tau(t) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2} r^2 \tau'(t) \frac{\partial}{\partial \Psi} \\ V_4 = \Theta(t) \frac{\partial}{\partial \Psi} \end{cases} \quad (4-49)$$

其中 $\tau(t), \Theta(t)$ 是时间 t 的任意光滑函数。

当选择 $\langle V_2, V_3(t^\alpha) + \lambda V_4(t^\alpha) \rangle$ 的优化组合时^[67-69]，假设如下不变量，

$$\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{t}} \\ g = \frac{\Psi}{\sqrt{t}} + \frac{\alpha}{2} \frac{r^2 z}{\sqrt{t^3}} - \frac{\lambda z}{\sqrt{t}} \\ w \end{cases} \quad (4-50)$$

这里 g, w 都是 x 的函数，因此(4-44)式方程组可进行如下变换：

$$\begin{cases} \omega_t = \omega_t \\ \Psi_t = 2\sqrt{t} \left(-\frac{g_x}{2\sqrt{t^3}} + \frac{3}{4} \frac{r^2 z}{\sqrt{t^5}} - \frac{1}{2} \frac{\lambda z}{\sqrt{t^3}} \right) \\ \Psi_r = \sqrt{t} \left(\frac{g_x}{\sqrt{t}} - \frac{\alpha r z}{\sqrt{t^3}} \right) \\ \Psi_{rr} = \sqrt{t} \left(\frac{g_{xx}}{t} - \frac{\alpha z}{\sqrt{t^3}} \right) \\ \Psi_{rrr} = \sqrt{t} \left(\frac{g_{xxx}}{\sqrt{t^3}} \right) \\ \Psi_{rrr} = \sqrt{t} \left(\frac{g_{xxx}}{t^2} \right) \\ \Psi_z = \sqrt{t} \left(-\frac{\alpha}{2} \frac{r^2}{\sqrt{t^3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \right) \\ \Psi_z = 0 \end{cases} \quad (4-51)$$

将上述的变换代入方程组(4-44)，可得到，

$$\begin{cases} \frac{\mu}{\rho} \left(g'' - \frac{1}{x} g' \right)' + \left(\frac{\alpha+1}{2} x^2 - \lambda - \frac{\mu}{\rho} \right) x \left(g'' - \frac{1}{x} g' \right)' + \left(\frac{1-2\alpha}{2} x^2 + 2\lambda \right) \left(g'' - \frac{1}{x} g' \right) = 0 \\ \mu \omega'' + \left(\frac{1+\alpha}{2} x - \frac{\lambda+\mu}{x} \right) \omega' = 0 \end{cases} \quad (4-52)$$

不妨假设,

$$f = g'' - \frac{1}{x} g' \quad (4-53)$$

将上式代入(4-52)式将变为,

$$\begin{cases} \rho f'' + \left(\frac{\alpha+1}{2} x^2 - \lambda - \frac{\mu}{\rho} \right) x f' + \left(\frac{1-2\alpha}{2} x^2 + 2\lambda \right) f = 0 & (a) \\ \mu \omega'' + \left(\frac{1+\alpha}{2} x - \frac{\lambda+\mu}{x} \right) \omega' = 0 & (b) \end{cases} \quad (4-54)$$

对于(4-54)式中(a)式是二阶变系数微分方程, 对其求解得:

$$f = x^{\frac{\lambda\rho}{2\mu}} e^{\left(-\frac{(1+\alpha)\rho}{8\mu} x^2 \right)} \delta \left(\frac{\rho\lambda + 2\mu \frac{1-2\alpha}{1+\alpha}}{4\mu}, \frac{\rho\lambda - 2\mu}{4\mu}, \frac{(1+\alpha)\rho}{4\mu} x^2 \right) \quad (4-55)$$

其中 $\delta(k, m, x)$ 是 Whittaker 方程的一般形式解。其 Whittaker 方程的一般形式为,

$$4x^2 \frac{d^2 \delta}{dx^2} = (x^2 - 4kx + 4m^2 - 1) \delta \quad (4-56)$$

而(4-54)方程组中(b)式的形式解为,

$$\omega = c \int x^{\frac{\lambda+\mu}{\mu}} e^{-\frac{1+\alpha}{4\mu} x^2} dx \quad (4-57)$$

所以对应的速度分量为,

$$\begin{cases} v^r = -\frac{\alpha r}{2t} + \frac{\lambda}{r} \\ v^\theta = \frac{\omega\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)}{r} \\ v^z = \frac{\alpha z}{t} - \frac{\left(c + \int \frac{f(x)}{x} dm \right)}{\sqrt{t}} \end{cases} \quad \left(x = \frac{r}{\sqrt{t}} \right) \quad (4-58)$$

它的旋度可以计算如下,

$$\begin{aligned}
\nabla \times V &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (u, v, w)^T \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial r}, r \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (v^r, v^\varphi, v^z)^T \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial r}, r \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (v^r \cos \varphi - v^\varphi \sin \varphi \quad v^r \sin \varphi + v^\varphi \cos \varphi \quad v^z) \\
&= \begin{pmatrix} \hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & r \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v^r \cos \varphi - v^\varphi \sin \varphi & v^r \sin \varphi + v^\varphi \cos \varphi & v^z \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{aligned} & \frac{yf \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \right)}{x^2+y^2} + \int -\frac{y\sqrt{t}f \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \right)}{(x^2+y^2)^{3/2}} d\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \\ & \frac{xf \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \right)}{x^2+y^2} + \int -\frac{y\sqrt{t}f \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \right)}{(x^2+y^2)^{3/2}} d\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \\ & y \left(-\frac{\alpha x}{2t\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\lambda x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) - \frac{x \left(-\frac{\alpha y}{2t\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\lambda y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2x^2 W \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \right)}{(x^2+y^2)^2} \\ & - \frac{2y^2 W \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \right)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2W \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \right)}{(x^2+y^2)} + \frac{x^2 W' \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \right)}{\sqrt{t}(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y^2 W' \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \right)}{\sqrt{t}(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned} \right)^T
\end{aligned}$$

通过对上述计算数值模拟,得到了湍流的各种流线图,图4-2是描述流体的层发散;图4-3描述的层流的凝聚现象;在参数的不同组合下,得到了流的各种结构

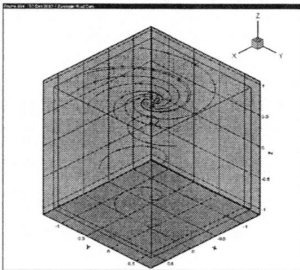


图 4-2 $\lambda=0.02, \mu=0.0003, \alpha=-0.7, c=-1.5$
形成平面的涡流流线图

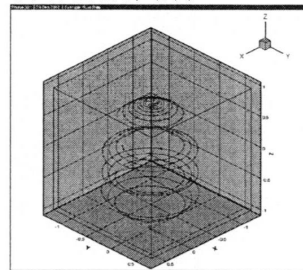
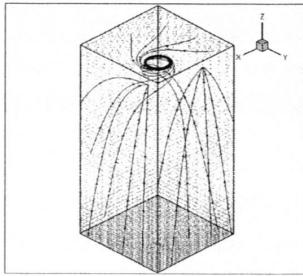
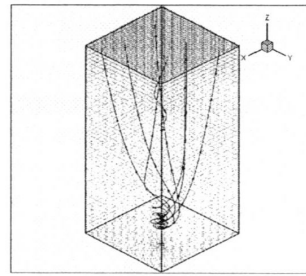


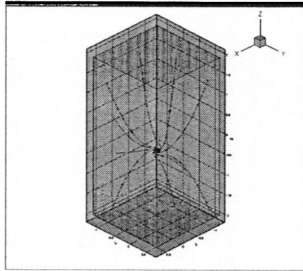
图 4-3 $\lambda=1.0 \times 10^{-6}, \mu=1.0 \times 10^{-10}, \alpha=-0.07, c=-1.5$
形成层流涡

图 4-4 $\lambda=0.06, \mu=3.0 \times 10^{-10}, \alpha=-10.7, c=-10.5$

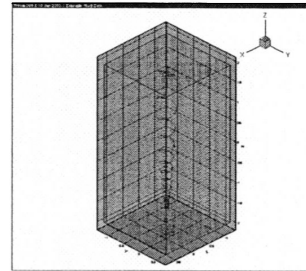
流的立体凝聚

图 4-5 $\lambda=0.06, \mu=3.0 \times 10^{-10}, \alpha=10.7, c=-10.5$

立体涡线

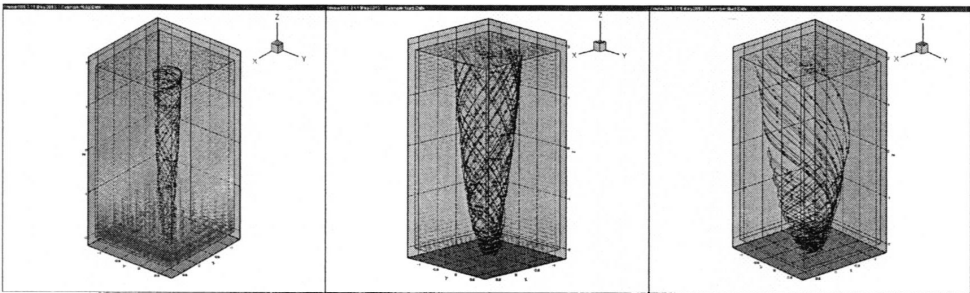
图 4-6 $\lambda=0.06, \mu=3.0 \times 10^{-10}, \alpha=100.7, c=-10.5, \rho=1.1$

不稳定点

图 4-7 $\lambda=0.01, \mu=3.0 \times 10^2, \alpha=-3.5, c=-9.5, \rho=1.1$

涡流涡线

通过上述的数值调研，我们得到了一系列流的结构，现在固定 $\lambda=0.11, \alpha=-2.8, \rho=1.0$ ，改变参数 c 和 μ ，得到了涡流随参量变化的结构图像，如图 4-8，

图 4-8 不同的压强和粘性系数下的流线结构图：图(a)是 $c=0.2, \mu=2.3$ 时的流线

结构；图(b)是 $c=4.2, \mu=2.3$ 时的流线结构；图(c)是 $c=12.2, \mu=2.3$ 时的流线结构

通过图 4-8 的流线结构，在参数 $c=0.2$ 时，系统大部分区域都处于对流状态，只有足部的区域会形成微弱的涡流(耗散结构)，随着参量 c 的增加，由于足部的耗散结构逐渐发育如图(b)，当参数 $c=1.2$ 时，这种耗散结构已溢出我们所选的控制体。从上述图像的变化过程，我们清楚的认识到了，当参数 c 增大时，即系统的外场加强，系统的涡流会逐渐增强，涉及的区域逐渐扩大。

4.3 结论及展望

通过对 N-S 方程的半解析解的调研，不同的参数空间下，流体的流线结构复杂多样，这里我们得到了层流和湍流以及类似中心、焦点、鞍点等非常丰富的流线结构。考察了改变压强梯度和粘性系数对涡流结构的影响，发现当加强压强梯度时，系统的涡流逐渐加强，波及的区域也逐渐扩大。

在上述的调研中，我们还存在一些问题有待解决，比如流体结构的涡度，焦点、鞍点等复杂结构的过程是如何建立起来的，它们的建立与那些参量有关，流体是如何随着时间演化的等等，这些能解析湍流本质上的细致结构还没有能完全剖析，希望能在日后的工作中能解

析这些动力学机制。

参考文献

- [1] I. Prigogine. 从存在到演化[M]. 曾庆宏等译. 上海: 上海科技出版社, 1986. 74-183
- [2] H. Haken. Advanced Synergetics. Berlin: Springer-Verlag, 1983
- [3] 郝柏林. 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他. 物理学进展, 1983, 3 (3)
- [4] 沈正维. 非线性科学兴起的思维特征及其对自然观的影响[J]. 科学技术与辩证法. 2006, 23(2)
- [5] L. B. Leopold, Am. J. Sci. 251:606 (1953)
- [6] J. J. Flint, Water Resour. Res.10:969(1974)
- [7] J. T. Hack, U. S. Geol. Surv. Prof. Paper 294B (1957)
- [8] Rinaldo, Rodriguez-Iturbe, Rigon, et al. Self organized fractal river networks[J]. Physical Review Letters, 1993, 70(6): 822-825
- [9] Liu Shulong, Zhang Yi, Liu Chongxiao, Wang Xuming. Simulating the evolution of a meandering river channel with a cellular automation model[J]. Journal of Ningxia University(Natural Science Edition), 2009, 30 (4): 325-330
- [10] Chai LH. 2004. A theoretical analysis of bubble interaction in boiling systems[J]. International Journal of Thermal Sciences, 43(11): 1067-1073
- [11] Reynolds O. Philos Trans Roy Soc London Ser A, 1895, 186: 123-164
- [12] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality: an explanation of the $1/f$ noise, Physical Review Letters 59 (4) (1987) 381-384.
- [13] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality, Physical Review A 38 (1) (1988) 364-374.
- [14] R. Albert, Emergence of scaling in random networks, Science 286 (5439) (1999) 509-512.
- [15] A. Barabási, R. Albert, Statistical mechanics of complex networks, Reviews of Modern Physics 74 (1) (2002) 47-97.
- [16] A. Rinaldo, I. Rodriguez-Iturbe, R. Rigon, E. Ijjasz-Vasquez, R. Bras, Self-organized fractal river networks, Physical Review Letters 70 (6) (1993) 822-825.
- [17] S. Manna, B. Subramanian, Quasirandom spanning tree model for the early river network, Physical Review Letters 76 (18) (1996) 3460-3463.
- [18] A. Giacometti, A. Maritan, J. Banavar, Continuum model for river networks, Physical Review Letters 75 (3) (1995) 577-580.
- [19] J. Banavar, F. Colaiori, A. Flammini, A. Giacometti, A. Maritan, A. Rinaldo, Sculpting of a fractal river basin, Physical Review Letters 78 (23) (1997) 4522-4525.
- [20] E. Somfai, L. Sander, Scaling and river networks: a landau theory for erosion, Physical Review E 56 (1) (1997) 5-8.
- [21] H. Takayasu, H. Inaoka, New type of self-organized criticality in a model of erosion, Physical Review Letters 68 (7) (1992) 966-969.
- [22] V. Colizza, J. Banavar, A. Maritan, A. Rinaldo, Network structures from selection principles, Physical Review Letters 92 (19) (2004) 198701.
- [23] A. Maritan, A. Rinaldo, R. Rigon, A. Giacometti, I. Rodriguez-Iturbe, Scaling laws for river networks, Physical Review E 53 (2) (1996) 1510-1515.
- [24] S. Hergarten, H. Neugebauer, Self-organized critical drainage networks, Physical Review Letters 86 (12) (2001) 2689-2692.
- [25] I. Rodriguez-Iturbe, E. Ijjasz-Vasquez, R. Bras, D. Tarboton, Power law distributions of discharge mass and energy in river basins, Water Resources Research 28 (4) (1992) 1089-1093.
- [26] L. Leopold, Downstream change of velocity in rivers, American Journal of Science 251 (8) (1953) 606-624.
- [27] L. Leopold, The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications, US Geological Survey Professional Paper 252 (1953) 481-492
- [28] D. Tarboton, R. Bras, I. Rodriguez-Iturbe, On the extraction of channel networks from digital elevation data, Hydrological processes 5 (1) (1991) 81-100.
- [29] R. Rigon, I. Rodriguez-Iturbe, A. Maritan, A. Giacometti, D. Tarboton, A. Rinaldo, On hack's law, Water Resources Research 32 (11) (1996) 3367-3374.

- [30] J. Hack, Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland, US Geological Survey Professional Paper 294 (1957) 45–97.
- [31] D. Montgomery, W. Dietrich, Channel initiation and the problem of landscape scale, *Science* 255 (5046) (1992) 826–830.
- [32] R. Rigon, I. Rodriguez-Iturbe, A. Rinaldo, Feasible optimality implies hack's law, *Water Resources Research* 34 (11) (1998) 3181–3189.
- [33] L. Leopold, W. Langbein, The concept of entropy in landscape evolution, US Geological Survey Professional Paper 500 (1962) 1–37.
- [34] P. Dodds, D. Rothman, Geometry of river networks i: scaling, fluctuations, and deviations, *Physical Review E* 63 (2000) 016115.
- [35] P. Dodds, D. Rothman, Geometry of river networks. ii. distributions of component size and number, *Physical Review E* 63 (1) (2000) 016116.
- [36] P. Dodds, D. Rothman, Geometry of river networks. iii. characterization of component connectivity, *Physical Review E* 63 (1) (2001) 16117.
- [37] A. Rinaldo, I. Rodriguez-Iturbe, R. Rigon, R. Bras, E. Ijjasz-Vasquez, A. Marani, Minimum energy and fractal structures of drainage networks, *WaterResources Research* 28 (9) (1992) 2183–2195.
- [38] A. Giacometti, Local minimal energy landscapes in river networks, *Physical Review E* 62 (2000) 6042–6051.
- [39] J. Banavar, F. Colaiori, A. Flammini, A. Maritan, A. Rinaldo, Scaling, optimality, and landscape evolution, *Journal of Statistical Physics* 104 (1) (2001) 1–48.
- [40] A. Rinaldo, I. Rodriguez-Iturbe, R. Rigon, Channel networks, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 26 (1) (1998) 289–327.
- [41] X. Wang, R. Hao, J. Huo, J. Zhang, Modeling sediment transport in river networks, *Physica A* 387 (25) (2008) 6421–6430.
- [42] G. Tucker, R. Bras, Hillslope processes, drainage density, and landscape morphology, *Water Resources Research* 34 (10) (1998) 2751–2764.
- [43] H. Risken, *The Fokker–Planck equation: Methods of solution and applications*, vol. 18, Springer-Verlag, 1996.
- [44] A. Barabasi, H. Jeong, Z. Néda, E. Ravasz, A. Schubert, T. Vicsek, Evolution of the social network of scientific collaborations, *Physica A* 311 (3–4) (2002) 590–614.
- [45] H. Chang, B. Su, Y. Zhou, D. He, Assortativity and act degree distribution of some collaboration networks, *Physica A* 383 (2) (2007) 687–702.
- [46] D. Raup, Biological extinction in earth history, *Science* 231 (4745) (1986) 1528.
- [47] J. Laherrere, D. Sornette, Stretched exponential distributions in nature and economy: fat tails with characteristic scales, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 2 (4) (1998) 525–539.
- [48] Q.Feng and L.Chai, *Physica A*, 387 (2008) 3583–3593
- [49] H.Haken, *Information and Self-Organization: A Macroscopic Approach to Complex Systems* (3rd Edition), Springer, New York (2006)
- [50] 郭治安等, 协同学入门[M].成都:四川人民出版社.1988
- [51] H.哈肯(著), 郭治安(译), 高等协同学[M].北京: 科学出版社.1989
- [52] Liming Chen, Lihe Chai, A theoretical analysis on self-organized formation of microbial biofilms, *Physica A* 370(2006)739-807
- [53] A. Bejan, Constructal theory of pattern formation, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 11, 2007, 735-768
- [54] António F. Miguel, Constuctal pattern formation in stony corals, bacterial colonies and plant roots under different hydrodynamics conditions, *Journal of Theoretical Biology*, 242(2006) 954-961
- [55] Adrian Bejan, How nature takes shape: extensions of constructal theory to ducts, rivers, turbulence, cracks, dendritic crystals and spatial economics, *Int. J. Therm. Sci.* 38(1999), 653-663
- [56] R.J. Goldstein, et al, Heat transfer—a review of 2002 literature, *Inernational Journal of Heat and Mass Transfer*, 48(2005), 819-927
- [57] Claude Godrèche, Florent Krzakala and Federico Ricci-Tersenghi, Non-equilibrium critial dynamics of the ferromagnetic Ising model with Kawasaki dynamics, *Journal of Statsitical Mechanics: Theory and Experiment*, P04007(2004), 1742-5468
- [58] Cuihua Huo, Lihe Cai, Physical pincipales and simulations on the structural evolution of eco-

- industrial systems, *Journal of Cleaner Production*, 16(2008), 1995-2005
- [60] Chai L H, Shoji M. Self-Organization and Self-Similarity in Boiling Systems[J]. *ASME J. Heat Transfer*, 124(2002), 507-515
- [61] 许炯心. 河型对含沙量空间变异的响应及其临界现象[J]. *中国科学*, 27 (1997), 548-553
- [62] Jie Huo, Xuming Wang, et al. Sediment transport dynamics in river networks: a model for Higher-Water seasons[J]. *The lecture Notes of ICST*, 4(2009), 832-840
- [63] 吴望一, 流体力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1982-1983
- [64] 蔡树棠, 刘宇陆, 湍流理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1993
- [65] Alexandre Joel Corin, Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Mathematics of Computation*, 22(1968), 745-762
- [66] Peter J. Olver, S. Axler, F.W. Gehring, K.A. Ribet, *Applications of Lie Groups to differential equations* (2nd Edition), Springer, New York, 1991
- [67] L. V. Ovsiannikov, Groups and group-invariant solutions of differential equations, *Dokl. Akad. Nauk USSR* 118(1958), 439-442
- [68] L. V. Ovsiannikov, *Group Properties of differential equations*, Novosibirsk, Memoirs, 1962
- [69] L. V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New York, 1982
- [70] L.V. Kapitanskii, Group analysis of the Euler and Navier-Stokes equations in the presence of rotational symmetry and new exact solutions of these solutions, *Sov. Phys. Dokl.*, 23(1978), 896-898
- [71] L.V. Kapitanskii, Group analysis of the Navier-Stokes equations in the rotational symmetry case and some new exact solutions, *Sov. J. Math.*, 21(1980), 314-327

致 谢

值此论文完成之际,我三年的硕士研究生学习也即将结束,这三年,是我人生的宝贵经历,亦是我一生美好的回忆。三年,采摘了许多成熟,播种了几多希望,奠基了未来些许辉煌;三年,改善了知识结构,充实了人生阅历,明确了前进航向促进了个人成长。

对于本篇论文的完成非常感谢我的指导老师王旭明教授。在论文写作期间王老师给予我悉心指导和无私的帮助,并且提出了很多宝贵的意见。本课题的研究和本论文的选题、构思、写作与定稿都离不开我尊敬的导师王旭明教授的悉心指导和关怀。

春华秋实,寒暑三易,三年的时光荏苒,暮然回首,心中涌起无限的敬意和阵阵感动。王旭明教授以真诚相待于学生,不仅教给我科学知识和研究方法,更教给我受用终身的为人之道,以自身的谦逊、坦诚、严谨的态度激励我、启发我不断前进,不断进步。向王老师表示最衷心的感谢!

三年的岁月流逝,回忆之余,感谢一路陪伴我,教我成长的陈焕铭老师、杨涛老师、沈宏君老师、李鹤龄老师、剡文杰老师、郝睿老师、霍杰老师等。感谢一直以来你们对我的关心和帮助。

感谢三年来朝夕相处的杨菊红、赵宁、宋佳等同学,在这个小的集体里我们互相学习,互相进步。感谢你们一直以来的帮助和合作。

最后要感谢我的家人,特别是我的父母,他们对儿女无私的爱是我努力的源泉;他们勤劳、正直、善良、淳朴的品质是影响我一生的财富。

三年来,每一份欣喜、彷徨、努力都历历在目,令我感动的时刻数不胜数,岁月的脚步依然匆匆,我会把每一份关怀,每一份勉励、每一份嘱托都铭记、珍藏,化作我生命河流中那朵最晶莹的浪花、记忆宝库中那颗最璀璨的珍珠,映射着我的成长,鞭策着我的进步!