利用导数巧解一类常见的三角函数问题

徐振宇　陈贤婵　郭小瑞

（陕西师范大学数学与信息科学学院）

在三角函数的教学和练习中，师生常常会碰到一类这样的三角函数问题：

问题 1：（2013 浙江镇海中学阶段性测试）已知 $3\sin\alpha+4\cos\alpha=5$，求 $\tan\alpha$。

问题 2：（2014 北京石景山 5 月）已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，$\alpha\in(0,\pi)$，求 $\tan\alpha$。

师生通常是从三角方面的知识与方程方面的知识相结合出发进行求解，但有时对于像问题 1、问题 2 师生可以将三角方面的知识与导数求极值的知识相结合来巧妙解答。因为三角函数相关的知识学习是在必修内容中，而导数相关知识在选修内容中，在高中数学的教学过程中，很多学校老师往往是先进行必修内容的教学，再进行选修内容的教学。选修内容的有些知识与前面必修内容知识联系密切。比如，导数与函数会放在高三复习时连接起来，但是因为高考对三角函数的考查一般很少与导数联系起来，所以很多师生都会忽略导数与三角函数相结合起来解题。有时对于像问题 1、2 这种类似的问题，将导数与三角函数结合起来能巧妙快速准确地解答题目。

作者先给出问题 1 目前常见的四种解法。

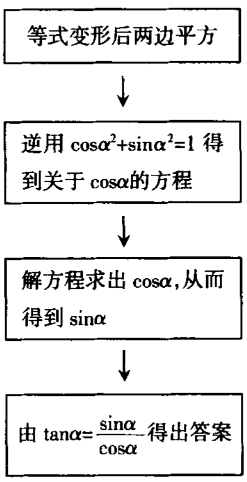

图 1　思路 1

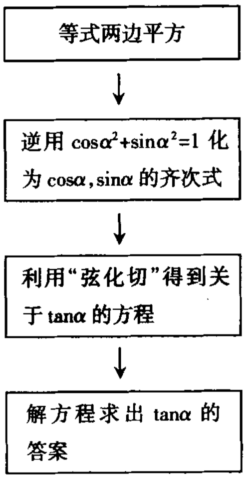

图 2　思路 2

解法 1：

$3\sin\alpha+4\cos\alpha=5$，等式变形得 $3\sin\alpha=5-4\cos\alpha$，两边平方得 $9\sin^2\alpha=25-40\cos\alpha+16\cos^2\alpha$

得到关于 $\cos\alpha$ 的方程：$25\cos^2\alpha-40\cos\alpha+16=0$，

$(5\cos\alpha-4)^2=0$，求出：$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，从而得到 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$

解法 2：

等式两边平方得到：

$9\sin^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha+16\cos^2\alpha=25$

$9\sin^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha+16\cos^2\alpha=25(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

等式两边同时除以 $\cos^2\alpha$ 得 $16\tan^2\alpha-24\tan\alpha+9=0$，$\tan\alpha=\frac{3}{4}$

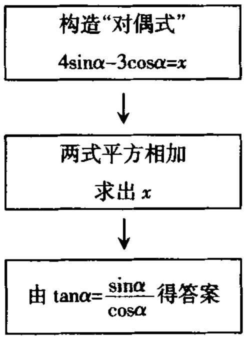

图 3　思路 3

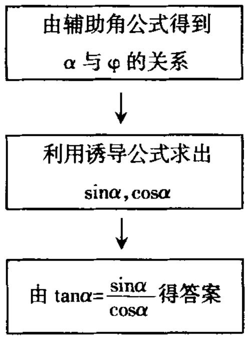

图 4　思路 4

解法3：

设 $4\sin\alpha-3\cos\alpha=x$，两式平方相加得到

$x^2+25=(4\sin\alpha-3\cos\alpha)^2+(3\sin\alpha+4\cos\alpha)^2=25$，$x=0$

则 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$

解法 4：

$\because 3\sin\alpha+4\cos\alpha=5\sin(\alpha+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{3}{5}$，$\sin\varphi=\frac{4}{5}$

$\therefore \sin(\alpha+\varphi)=1$，则 $\alpha+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

$\sin\alpha=\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi)=\cos\varphi=\frac{3}{5}$，

$\cos\alpha=\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi=\frac{4}{5}$，

故 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$

现在，重点介绍解法 5：利用导数的有关知识来求解。

解法 5：

设 $f(x)=3\sin x+4\cos x$，

$f(\alpha)=3\sin\alpha+4\cos\alpha=5\sin(\alpha+\varphi)$，其中 $|\sin(\alpha+\varphi)|\leqslant1$

$\therefore f(\alpha)$ 的最大值为 5，最小值为 -5，

而由题中已知得：当 x 取 α 时，取得了最大值。由导数的相关知识知：α 为 $f(x)$ 的极值点时，$f'(\alpha)=0$，即：$3\cos\alpha-4\sin\alpha=0$，故 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$

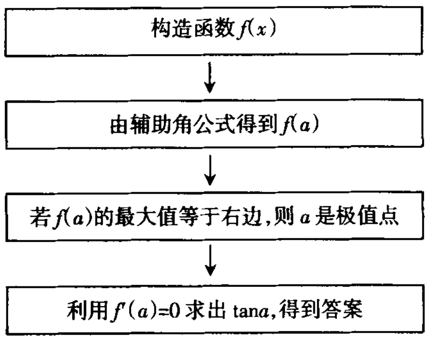

图 5　思路 5

作者在用解法 5 给学生讲解这类题时，效果是非常好的。因为在用前面的方法讲解时，学生虽然入手很快，但是总在计算时出错，得分率不是很高，但是教授了解法 5 后，学生出错的概率小了很多，除了个别求导求错之外。将此法写出来与大家分享，希望能给同仁以帮助与启示。

● 编辑　孙玲娟