[理论物理与应用物理学研究]

混合体的有效介电常数

李 瑾
(陕西学前师范学院 物理与电子技术系，陕西 西安 710100)

摘 要：基于复合介质单位体积电场能量守恒，得到了复合介质的有效介电常数，以文献给出的有效介电常数模型为基准，验证了文中结果的有效性。结合现有文献，研究了降雨及沙尘暴的有效介电常数，结果表明：降雨的有效介电常数随温度敏感的变化，当能见度较大时，沙尘暴有效介电常数的变化可以忽略；算法简单明了，为研究其他复杂介质的电磁波传播做了有益的探索。

关键词：混合体；介电常数；静电能
中图分类号：O482.4 **文献标识码**： A **文章编号**：1672-2914(2014)02-0011-04

Equivalent Permittivity Dielectric Mixtures

LI Jin
(Department of Physics & Electronics, Shaanxi Xueqian Normal University, Xi'an 710100,Shaanxi,China)

Abstract: The effective permittivity of dielectric mixtures is presented in this paper based on electric energy conservation of a unit volume for the dielectric mixtures. Its validity is tested by comparing its result with that from the available references about effective permittivity. Based on the reference the effective permittivity for rainfall and sand dust-storm are researched. Simulations show that the effective permittivity for rainfall varies sensitively with the temperature and that variation with the visibility for the sand dust-storm may be ignored under the case of a large visibility. The algorithm used in this paper is simplicity. It has been a beneficial exploration of electromagnetic wave propagation in other dielectric mixtures.

Key words: mixture; permittivity; static electric power

密度均匀的电介质是一种理想的的介质，自然界中实际遇到的电介质一般为粒子的混合体，这些混合粒子具有不同的介电特性，在遥感、电波传播等领域，人们渴望将粒子组成的混合体看成各向同性的均匀介质，这一均匀介质可以用有效介电常数描述。利用这一方法许多不均匀介质的电磁特性受到学者的普遍关注，如雪、冰晶、沙尘暴、雨滴、雾霾和森林等[1-8]。其中降雨是这些混合体的一种重要表现，雨滴使得混合体的介电特性随其相对体积敏感的变化，这是由于雨滴的介电常数和其他粒子的介电常数相比有着较大的差异，从介电常数存在明显差异的角度可以用来区别一年冰晶和多年冰晶。

从已知粒子的介电常数和其所占的相对体积出发，有关学者提出了几种有效介电常数模型[1,3,6]，这些混合体有效介电常数模型的得出依赖于粒子内部静电场与照射电场的关系，为了简单起见，通常认为粒子在形体上呈现为均匀各向同性介质球或均匀各向同性介质椭球。如果将有效介电常数应用于电磁波传播研究，通常认为粒子的半径远小于电磁波的波长，满足准静态近似条件。在低频段或满足准静态近似的条件下，已有的这些有效介电常数模型用于电磁波的传播、散射等十分有效；近年来各向异性介质如磁化等离子体等的电磁波传播与散射已受到国内外学者的普遍关注，假定粒子为各向同性介质

收稿日期：2013-12-22
基金项目：国家自然科学基金项目(61271110,61102018)；陕西学前师范学院科研基金项目(2013KJ069)和教改基金项目(13JG030Q)。
作者简介：李 瑾(1986-)，女，陕西咸阳市人，陕西学前师范学院物理与电子技术系助教，硕士，研究方向为光电散射与传播。

万方数据

的有效介电常数模型不再适应。

本文在文献[1-8]的基础上，从电场的能量守恒出发，得出了混合体的有效介电常数公式；首先给出了任意均匀介质球内外电场的能量，结合粒子的尺寸分布得到了单位体积混合体的总能量。其次，从能量守恒出发，得到了混合体的有效介电常数模型，验证了该模型的有效性。最后给出了几种典型粒子如雨滴、沙尘暴等的有效介电常数的数值结果，并从物理理论上分析了结果的物理机制。所用方法不仅适用于研究各向同性粒子混合体的有效介电常数，还可应用于非均匀各向异性粒子组成的混合体的有效介电常数的研究。

1 混合体的有效介电常数

假设背景介质的介电常数为e_0，悬浮粒子为球形粒子，半径为a，介电常数为ε，当粒子位于匀强电场E_0中时，粒子的内部电场为[1]

$$E_i=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\left(\cos\theta\hat{r}-\sin\theta\hat{\theta}\right)$$

外场为

$$E_e=E_0\left(\cos\theta\hat{r}-\sin\theta\hat{\theta}\right)+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\frac{E_0a^3}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta}\right)$$

其中r为观察点到坐标系原点的距离；粒子内外电场的能量密度分别为

$$w_i=\frac{\varepsilon}{2}\frac{9\varepsilon_0^2}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)^2}E_0^2$$

$$w_e=\frac{\varepsilon_0}{2}\left[E_0^2+\frac{2(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)^2}\frac{E_0^2a^6}{r^6}\left(1+\cos^2\theta\right)+\frac{2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)}\frac{E_0^2a^3}{r^3}\left(3\cos^2\theta-1\right)\right] \tag{1}$$

对式(1)在单位体积上积分可得一个粒子的能量

$$p=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}+\frac{6\pi\varepsilon\varepsilon_0^2a^3}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)^2}E_0^2-\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}\frac{4\pi a^3}{3}+\frac{16\pi E_0^2a^6}{9}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)^2}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_e^3}\right) \tag{2}$$

其中$r_e=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$单位体积的半径；式(2)由外场的能量和粒子的能量构成；故粒子由于极化从外场中获得的能量为

$$p_a=\frac{6\pi\varepsilon\varepsilon_0^2a^3}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)^2}E_0^2-\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}\frac{4\pi a^3}{3}+\frac{16\pi E_0^2a^6}{9}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)^2}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_e^3}\right) \tag{3}$$

设$n(D)$为单位体积中粒子直径在D到$D+\mathrm{d}D$之间的粒子个数，单位体积混合体的总能量为

$$p_t=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}+\int_{D_1}^{D_2}n(D)p_a\mathrm{d}D \tag{4}$$

在研究混合体的极化时，通常认为混合体内部的电场[5]为E_0，这是一种较好的近似；实际上，混合体内部的电场略小于E_0，沙尘暴等混合体可以近似的看成一个无限长圆柱体，相对有效介电常数为ε_e，相对磁导率为1，电场E_0垂直于其轴线，内部的电场为

$$E_i=\frac{2\varepsilon_0E_0}{\varepsilon_e+\varepsilon_0}$$

其中$\varepsilon_e=\left(\varepsilon_e^{'}+j\varepsilon_e^{''}\right)$，单位体积混合体的电能为

$$p_t=\frac{2\varepsilon_e\varepsilon_0^2E_0^2}{(\varepsilon_e+\varepsilon_0)^2} \tag{5}$$

由此可得混合体的有效介电常数为

$$\frac{\varepsilon_{er}}{(\varepsilon_{er}+1)^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\varepsilon_0E_0^2}\int_{D_1}^{D_2}n(D)p_a\mathrm{d}D \tag{6}$$

考虑到复合体的相对介电常数十分接近于1，悬浮粒子的大小均匀分布，复合介质的相对有效介电常数近似为

$$\varepsilon_{er}=1-v+\frac{9v\varepsilon_r}{(\varepsilon_r+2)^2}+\frac{8v}{3}\frac{(\varepsilon_r-1)^2}{(\varepsilon_r+2)^2}\left(1-\frac{a^3}{r_e^3}\right) \tag{7}$$

其中v为单位体积中粒子总体积。将$\varepsilon_r=\left(\varepsilon_r^{'}+j\varepsilon_r^{''}\right)$代入式(7)可得复合介质介电常数的实部与虚部，此不再赘述。

图1为降雨引起的电磁波衰减，其中所用频率200 GHz，根据文献[1]取雨滴的折射率为7.25+j2.68，雨滴谱采用Marshall和Palmer给出的雨滴普模型[2]；其中实线为本文结果，虚线为国际电讯联盟推荐的(Rec. ITU-R)[4]降雨引起的电磁波衰减，可以看出，在降雨率小于40 mm/h，两种结果基本一致，当降雨率大于40 mm/h，本文结果略大于文献结果；随着降雨率的增大，雨滴对电磁波的吸收与散射也在增大，

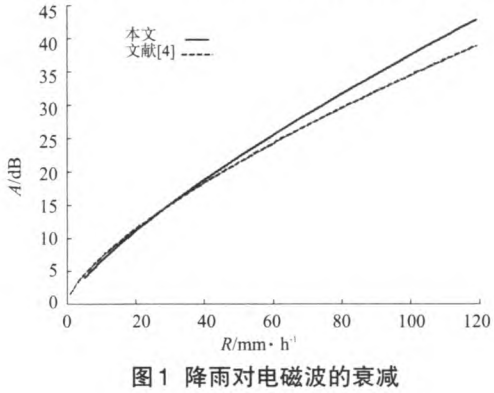

图1 降雨对电磁波的衰减

万方数据

雨滴和自由空间所构成的混合体中的电磁波和平面波的差异也增大,而在公式(6)的计算中,假定混合体中的电磁波为平面电磁波,与降雨率无关,所以导致了大雨时两种结果的不一致。在图2中,采用文献[1]给出的存水的介电常数的绝对值,其中圆线为Maxwell-Garnett模型给出的结果,实线为本文结果,由于相对有效介电常数和1很接近,纵轴取以e为底的对数;文献[2]模型结果大于本文模型结果,由于在Maxwell-Garnett模型的计算中,假定混合体内部的电场为均匀场E_0,没有考虑粒子极化产生的附加电场,从而减小了Maxwell-Garnett模型的分母,导致结果大于本文的计算结果。图3和图4分别为温度升高时有效介电常数的实部和虚部随温度的变化,这是由于温度升高时,存水将膨胀,分子间的距离增大,分子间的固有力将减小,分子的正电中心和负电中心在外电场的作用下它们之间的距将离增大,水更容易极化,导致介电常数增大;另一方面,随着温度的升高,原子核外的电子从低能量状态跃迁到高能量状态的概率增大,从外电场中获得能量的概率将减小,对电磁波的损耗将减小,介电常数的虚部将减小。利用公式(6)计算砂土、壤土和黏土引起的沙尘暴微波波段的有效介电常数,实部与虚部随能见度的变化分别为图5、6所示,沙尘粒子的半径取0.1 mm,湿度含量分别为3.88、2.20和20.09;可以看出,能见度增大时,有效介电常数急剧的减小,当能见度大于800 m后,沙尘粒子介电常数引起的沙尘暴有效介电常数的变化可以忽略。

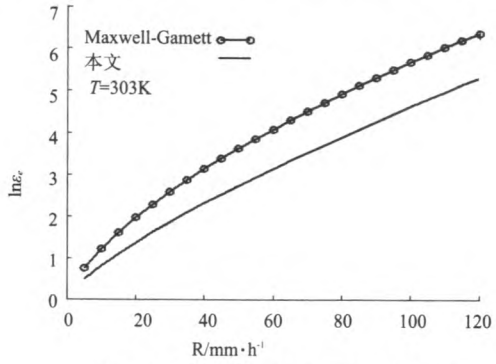

图2 有效介电常数随降雨率的变化

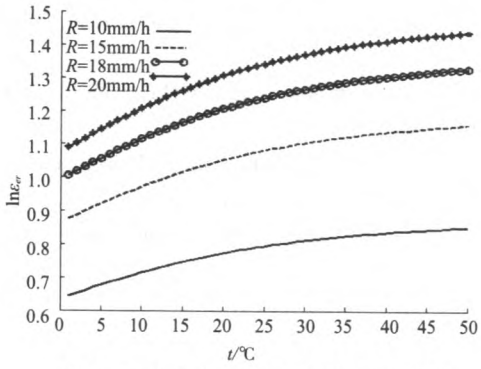

图3 有效介电常数实部随温度的变化

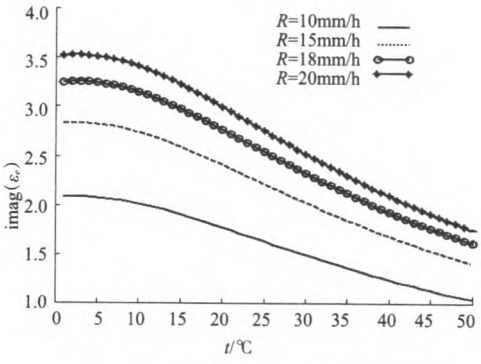

图4 有效介电常数虚部随温度的变化

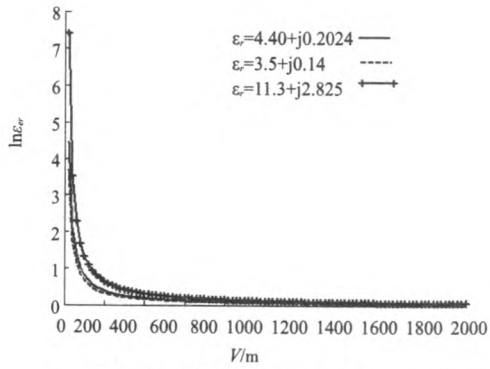

图5 介电常数实部随能见度的变化

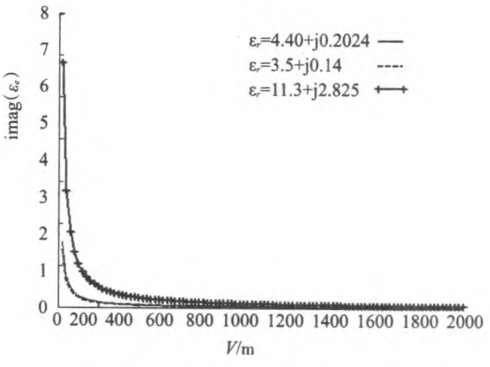

图6 介电常数虚部随能见度的变化

2 结论

基于电场的能量守恒,将自由空间中悬浮粒子视为复合均匀电介质,得到了复合介质的有效介电常数;以国际电讯联盟推荐的降雨对电磁波的衰减和有关文献给出的有效介电常数模型为基准,验证了本文结果的有效性;结合现有文献,利用本文提出

万方数据

的有效介电常数模型对存水构成的复合介质的有效介电常数随温度的变化进行了仿真计算，结果发现：有效介电常数的实部随温度的升高而增大，虚部随温度的升高而减小，给出了温度效应的物理机制。对沙尘暴的有效介电常数随能见度的变化进行了数值计算，结果表明：当能见度较大时，沙尘暴有效介电常数的变化在工程应用上可以忽略不计；基于电场能量守恒研究复合介质的有效介电常数，避免了基于极化强度矢量相等方法的复杂性，如何利用本文算法研究各向异性粒子悬浮构成的复合介质的有效介电常数是下一步要开展的工作。

参考文献：

[1]陈　康，王庆安.用T一矩阵法分析降水粒子在微波段下的Z_{DR}特性[J].气象科学，2000，20(4)：469-474.

[2]Akira Ishimaru. Wave propagation and scattering in random medium[M].New York:Oxford University Press, 1997: 27-30.

[3]Shvola A H, Kong J A.Effective permittivity of dielectric mixtures[J].IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing, 1988, 26(4): 420-427.

[4]ITU-R.Specific attenuation model for rain for use in prediction methods[S].ITU-R, 2005: 838-1.

[5]Stratton J A.Electromagnetic theory[M].New York: Mcgraw Hill Book Company Inc, 1941.

[6]Bohren C F, Battan L J.Radar scattering of microwaves by spongy ice spheres[J].J Atomos Sci, 1982, 39: 2623-2628.

[7]刘西川，高太长，秦　健，等.降雨对微波传输特性的影响分析[J].物理学报，2010，59(3)：2156-2163.

[8]王海强.尘暴中的微波衰减和交叉极化[J].电波与天线，1991(6)：18-27.

(上接第10页)

参考文献：

[1]Smarandache F.Only problems, not solutions[M].Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2]杨明顺.关于Smarandache及Smarandache LCM函数的混合均值[J].西北大学学报：自然科学版，2010，40(5)：772-773.

[3]Lv Zhongtian.On the F Smarandache LCM function and its mean value [J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[4]Chen Jianbin. Value distribution of the F Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 15-18.

[5]闫晓霞. Smarandache LCM函数与其对偶函数的混合均值[J].内蒙古师范大学学报：自然科学汉文版，2010，39(3)：229-231.

[6]潘承洞，潘承彪. 素数定理的证明[M].上海：上海科学技术出版社，1988.

[7]Tom M Apostol. Introduction to analytical number theory [M].New York: Springer-Verlag, 1976.

[8]潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M].北京：科学出版社，1988.

万方数据