● 童其林

新颖数学填空题欣赏

本文选取几道亲颖而富有挑战性的填空题加以分析研究，希望对大家解答填空题有所帮助.

例1 (2011年石景山期末理8) 下图展示了一个由区间(0,1)到实数集$\mathbf{R}$的映射过程：区间(0,1)中的实数m对应数轴上的点M(如图1)；将线段AB围成一个圆，使两端点A、B恰好重合(从A到B是逆时针，如图2)；再将这个圆放在平面直角坐标系中，使其圆心在y轴上，点A的坐标为(0,1)(如图3)，图3中直线AM与x轴交于点$N(n,0)$，则m的象就是n，记作$f(m)=n$.

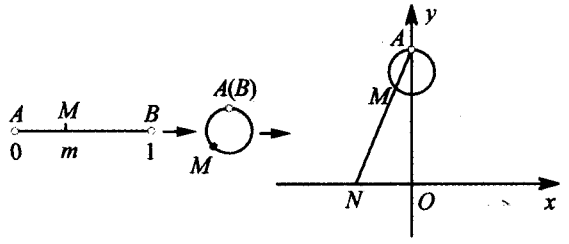

图1　　图2　　图3

下列说法：①$f(\frac{1}{4})=1$；②$f(x)$是奇函数；③$f(x)$在其定义域上单调递增；④$f(x)$的图象关于y轴对称.

其中正确命题的序号是_____(写出所有正确命题的序号).

解析：从图象可以看出$f(\frac{1}{4})<0$，所以①错；因为$f(x)$的定义域是(0,1)，其定义域不关于原点对称，故②、④错；显然随着m的增大，n也增大，所以$f(x)$在其定义域上单调递增，③是

点评：对于和式(或积式)的等式(或不等式)，可以从右端的目标式(或T_n)入手. 求S_n-S_{n-1}(或$\frac{T_n}{T_{n-1}}$)，然后对照左端的通项式(或适当放缩)，那么利用恒等式

$$S_1+(S_2-S_1)+(S_3-S_2)+\cdots+(S_n-S_{n-1})=S_n,$$

或$$T_1\cdot\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{T_3}{T_2}\cdot\cdots\cdot\frac{T_n}{T_{n-1}}=T_n,$$

可以快捷获得结论.

六、逆向构造，引入导数

例6　求证：$(1\times2\times3\times\cdots\times n)^4<3^{n(n+1)}$.

分析：本例用数学归纳法证明，很复杂.

本题即$1^4\times2^4\times3^4\times\cdots\times n^4<3n(n+1)$. 注意到右式的目标式较简单，可从它入手，构造出左端各项. 然后相乘即可.

证明：记$T_n=3^{n(n+1)}$，则$n\geqslant2$时，$\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{3^{n(n+1)}}{3^{(n-1)n}}=3^{2n}$.

对比左式的通项，只要有$3^{2n}>n^4$，即$3^n>n^2$.

构造相应函数$f(x)=3^x-x^2$，可求得$f'(x)=3^x\ln3-2x$，$f''(x)=3^x(\ln3)^2-2$. 由于$\ln3>1$，那么当$x\geqslant1$时，$3^x>3$，则$f''(x)>3-2=1>0$. 所以$f'(x)$在$[1,+\infty)$上递增，故$f'(x)>f'(1)=3\ln3-2>0$. 所以$f(x)$在$[1,+\infty)$上递增，故$f(x)\geqslant f(1)=3-1=2>0$. 可得$3^x>x^2(x\geqslant1)$. 从而$3^n>n^2$，即$3^{2n}>n^4$，所以$\frac{T_n}{T_{n-1}}>n^4$.

再由恒等式法

$$T_n=T_2\times\frac{T_2}{T_1}\times\frac{T_3}{T_2}\times\cdots\times\frac{T_n}{T_{n-1}}>3^2\times2^4\times3^4\times\cdots\times n^4>(1\times2\times3\times\cdots\times n)^4.$$

从而$(1\times2\times3\times\cdots\times n)^4<3^{n(n+1)}$.

练习题：

1. 求证：当$n>4$时，$2^n>n^2$.

2. 设$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$，求证$a_n>\sqrt{2n+1}$.

3. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是大于1的且互不相同的正整数，求证$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}<\frac{3}{4}$.

4. 设$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant3$，求证：$\frac{2^n-1}{2^n+1}>\frac{n}{n+1}$.

5. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n^2+3}{2a_n}$，$b_n=3-a_n^2$，求证：(1)$b_n<0$；(2)$|\frac{b_{n+1}}{b_n}|<\frac{1}{2}$；(3)$|b_n|<(\frac{1}{2})^{n-1}$.

哈尔滨市第一二三中学(150040)

正确的. 故所有正确命题的序号是 ③.

例 2 (2012 年上海七宝中学高考数学模拟题) 在某条件下的汽车测试中,驾驶员在一次加满油后的连续行驶过程中从汽车仪表盘得到表 1 信息:

表 1

时间	油耗(升/100 公里)	可继续行驶距离(公里)
10:00	9.5	300
11:00	9.6	220

注: 油耗 $=\frac{\text{加满油后已用油量}}{\text{加满油后已行驶距离}}$, 可继续行驶距离 $=\frac{\text{汽车剩余油量}}{\text{当前油耗}}$, 平均油耗 $=\frac{\text{指定时间内的用油量}}{\text{指定时间内的行驶距离}}$.

从上述信息可以推断在 10:00—11:00 这 1 小时内 _____ (填上所有正确判断的序号).

① 行使了 80 公里;

② 行使不足 80 公里;

③ 平均油耗超过 9.6 升/100 公里;

④ 平均油耗恰为 9.6 升/100 公里;

⑤ 平均车速超过 80 公里/小时.

解析: 实际用油为 $\frac{9.5}{100}\times 300-\frac{9.6}{100}\times 220=7.38$(升). 行驶距离 $<\frac{7.38}{9.6}\times 100=76.875$, 所以 ① 错误, ② 正确.

设 v 为已用油量, ΔV 为一个小时内的用油量, s 为已行驶距离, Δs 为一个小时内已行的距离, 则有 $\begin{cases}\frac{v}{s}=9.5,\\ \frac{v+\Delta v}{s+\Delta s}=9.6.\end{cases}$

得 $v+\Delta v=9.6s+9.6\Delta s$,

$9.5s+\Delta v=9.6s+9.6\Delta s$, $\Delta v=0.1s+9.6\Delta s$, $\frac{\Delta v}{\Delta s}=\frac{0.1s}{\Delta s}+9.6>9.6$.

所以 ③ 正确, ④ 错误. ⑤ 由 ② 知错误.

故应填上 ②③.

点评: 此题考查学生的阅读能力和代入公式的计算能力.

例 3 对于函数 $y=f(x)$, 如果在其定义域内存在某个常数 a, 使不等式 $-\frac{(x-a)^2}{3}\leqslant f(x)-f(a)-2(x-a)\leqslant\frac{(x-a)^2}{3}$ 对于该函数定义域内的任意实数 x 恒成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数值 $f'(a)=$ _____.

解析: 由 $-\frac{(x-a)^2}{3}\leqslant f(x)-f(a)-2(x-a)\leqslant\frac{(x-a)^2}{3}$, 可得

$2-\frac{x-a}{3}\leqslant\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 2+\frac{x-a}{3}$, 当 $x\to a$ 时, 就有 $2\leqslant f'(a)\leqslant 2$, 所以 $f'(a)=2$.

点评: 巧妙变成斜率模型, 再利用导数定义, 便顺利完成问题的解答.

例 4 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(0)=0$, $f(x)+f(1-x)=1$, $f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$, 且当 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1$ 时, 有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 则 $f(\frac{1}{2012})$ 的值为 _____.

解析: $f(0)=0$, $f(0)+f(1)=1$, 得 $f(1)=1$.

在 $f(x)+f(1-x)=1$ 中令 $x=\frac{1}{2}$, 得 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, 令 $x=2$, 得 $f(2)+f(1)=1$, $f(2)=0$.

由于 $f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$,

所以 $f(\frac{1}{10})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$,

$f(\frac{1}{1250})=\frac{1}{2}f(250)=\frac{1}{4}f(\frac{1}{50})$

$=\frac{1}{8}f(\frac{1}{10})=\frac{1}{32}$,

$f(\frac{1}{5})=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$,

$f(\frac{1}{3125})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{625})=\frac{1}{4}f(\frac{1}{125})$

$=\frac{1}{8}f(\frac{1}{25})=\frac{1}{16}f(\frac{1}{5})=\frac{1}{32}$.

而 $\frac{1}{3125}<\frac{1}{2012}<\frac{1}{1250}$,

所以 $\frac{1}{32}=f(\frac{1}{3125})\leqslant f(\frac{1}{2012})\leqslant f(\frac{1}{1250})=\frac{1}{32}$, 所以 $f(\frac{1}{2012})=\frac{1}{32}$.

点评: 本题是一个有难度的问题, 挖掘 $f(\frac{1}{3125})=\frac{1}{32}$, $f(\frac{1}{1250})=\frac{1}{32}$, 利用夹逼法是解决问题的关键.

考查目标: 夹逼法, 特殊与一般的方法, 较强的思维能力.

例 5 二次函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$ 在 $x\in[-1,1]$ 内至少存在一个 x, 使得 $f(x_0)>0$, 则实数 p 的取值范围是 _____.

分析: 此题的第一感觉是条件不易使用. 反面呢? 显然是一种肯定的结果. 因此, 先求问题的反面, 再由补集法(全集为 $\mathbf{R}$), 即可求得原问题的解.

由于原问题的反面是"$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 内无一个 x, 使 $f(x)$

>0 成立，求实数 p 的取值范围”，也就是说“对任意 $x\in[-1,1]$，$f(x)\leqslant 0$ 恒成立，求实数 p 的取值范围”. 因此，只需令 $\begin{cases}f(-1)\leqslant 0,\\ f(1)\leqslant 0,\end{cases}\Rightarrow p$ 的取值范围是 $(-\infty,-3]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$.

故满足题设的 p 的取值范围是 $(-3,\frac{3}{2})$.

点评：克服思维僵化，要求我们的同学平时就要有求简意识，创新意识，注意一题多解、多题一解、一理多用的归纳和训练.

例 6　直线 $y=ax-1$ 与曲线 $x^2y-2xy+y^3-2y^2+y=0$ 仅有两个公共点，则 a 等于 _____.

解析：$x^2y-2xy+y^3-2y^2+y=0\Rightarrow y[(x-1)^2+(y-1)^2-1]=0\Rightarrow y=0$ 或 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

$y=0$ 表示 x 轴，$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 表示圆心为 $(1,1)$，半径为 1 的圆.

而直线 $y=ax-1$ 是恒过定点 $(0,-1)$ 的直线，画出直线以及圆，当直线过点 $(1,0)$ 或与圆相切时，直线与曲线仅有两个公共点，所以 $a=\frac{0-(-1)}{1-0}=1$，或 $d=\frac{|a-1-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$，解得 $a=\frac{3}{4}$. 综上得 $a=1$ 或 $a=\frac{3}{4}$.

考查目标：直线与不规则曲线的公共点.

例 7　设 $a,b\in\{0,1,2\}$，且 a,b 满足不等式 $a-10b+13>0$，若 $\xi=a+b$，则 $E\xi=$ _____.

解析：满足 $a,b\in\{0,1,2\}$ 的 (a,b) 是 $(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(2,0),(3,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$，共 16 个. 其中 a,b 满足不等式 $a-10b+13>0$ 的有 $(0,0),(0,1),(1,0),(2,0),(3,0),(1,1),(2,1),(3,1)$，所以基本事件总数为 8 个，即 ξ 的分布列为

$\xi=a+b$	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以 $E\xi=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{2}{8}+2\times\frac{2}{8}+3\times\frac{2}{8}+4\times\frac{1}{8}=2$.

点评：由于 a,b 的取值不多，把所有情况考虑清楚，问题便不难解决.

例 8　已知方程 $ax^2+2(2a-1)x+4a-7=0$，$a\in\mathbf{N}^*$ 若方程至少有一个整数解，则实数 $a=$ _____.

解析：如果利用 $x=\frac{1-2a\pm\sqrt{3a+1}}{a}$ 来做将是很困难的. 可以换一种思路，解出 $a=\frac{2x+7}{(x+2)^2}(x\neq -2)$. 由 $a\in\mathbf{N}^*$，所以 $2x+7\geqslant(x+2)^2\Rightarrow -3\leqslant x\leqslant 1$，即 x 只能取 $-3,-1,0,1$. 验证得：当且仅当 $x=-3,-1,1$ 时，a 为正整数，代入求得 $a=1$ 或 $a=5$.

点评：巧妙通过变换未知量进而构造出函数成为解题的关键，此题易忽略 $x\neq -2$ 这个限制条件. 考查的是逆向思维能力.

例 9　将半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆周十二等分，从分点 i 到分点 $(i+1)$ 的向量依次记作 $\overrightarrow{t_it_{i+1}}$，则 $\overrightarrow{t_1t_2}\cdot\overrightarrow{t_2t_3}+\overrightarrow{t_2t_3}\cdot\overrightarrow{t_3t_4}+\cdots+\overrightarrow{t_{12}t_1}\cdot\overrightarrow{t_1t_2}=$ _____，

解析：先求正十二边形的边长以及它们的外角，再由向量的数量积计算各项之值. 连结相邻分点的线段构成半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆内接正 12 边形，相邻两个边向量的夹角是正 12 边形的外角，即为 30 度，而各边向量之长为 $2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$，则

$$\overrightarrow{t_1t_2}\cdot\overrightarrow{t_2t_3}=(\sqrt{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}})^2\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=2\times\frac{2-\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{4}.$$

共有 12 个相等项. 所以求得数量积之和为 $6\sqrt{3}-9$.

点评：本题由相邻两边组成的向量的夹角应是正 12 边形的外角，考生特别引起重视.

例 10　（2009 年石家庄质检题）. 如图 4，某药店有一架不准确的天平（其两臂不等）和一个 10 克的砝码. 一名患者想要 20 克中药，售货员将砝码放在左盘中，将药物放在右盘中，待平衡后交给患者；然后又将药物放在左盘中，将砝码放在右盘中，待平衡后再交给患者. 设患者实际购买药物为 m 克，则 m _____ 20 克（填 $>$ $<$ $=$）

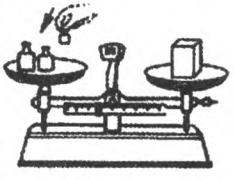

图 4

解析：设两臂长分别为 $b,a(b>a)$，第一次、第二次称得的药物分别为 x,y 克，则：$10b=xa,yb=10a$，从而

$$m=x+y=\frac{10b}{a}+\frac{10a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{10b}{a}\cdot\frac{10a}{b}}=20,$$

当且仅当 $\frac{10b}{a}=\frac{10a}{b}$，即 $a=b$ 等号成立. 因为 $a\neq b$，所以 $m>20$ 克，故应填 $>$.

点评：凭感觉“药店不吃亏”，填 $<$ 是错误的.

福建省永定县城关中学（364100）